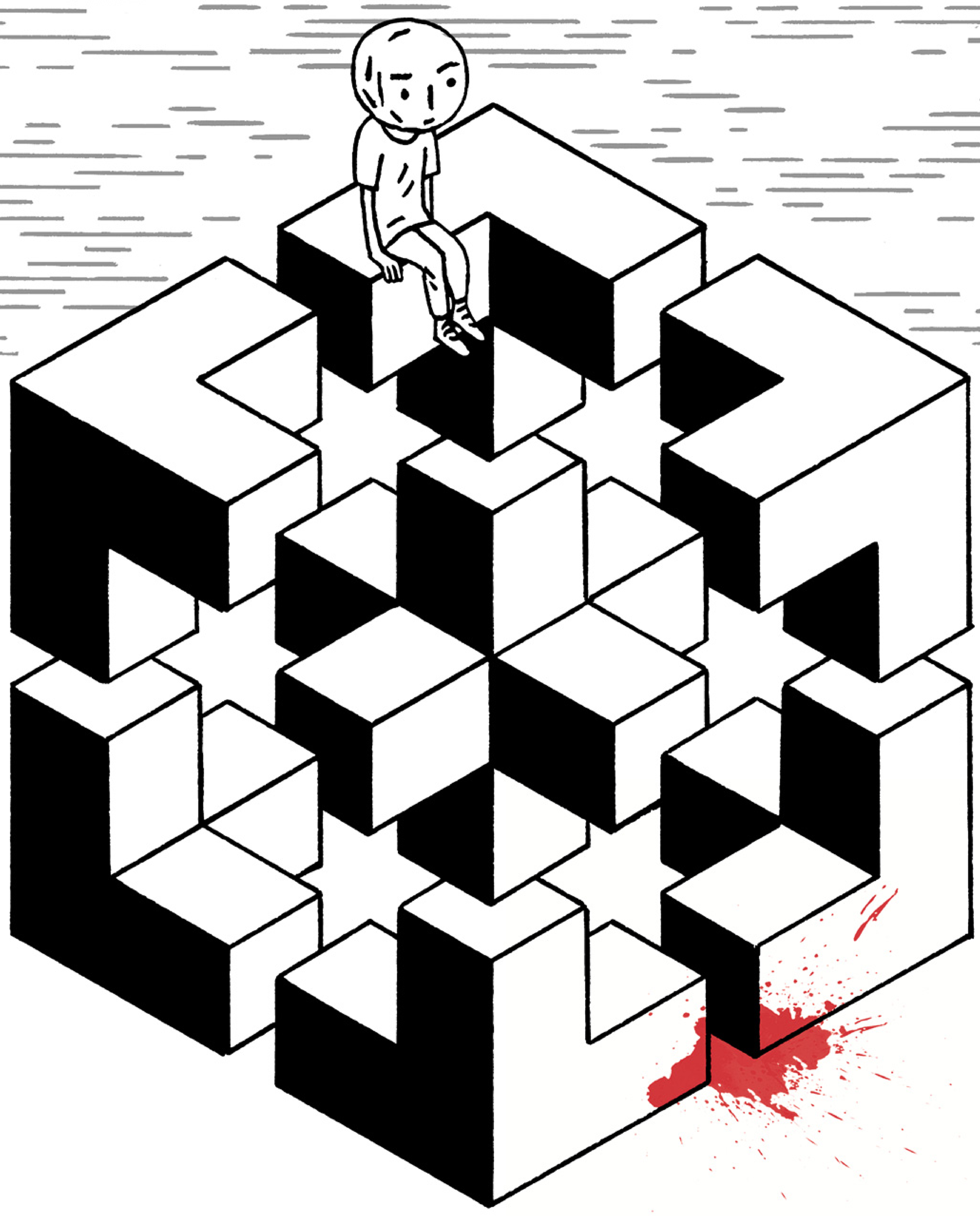
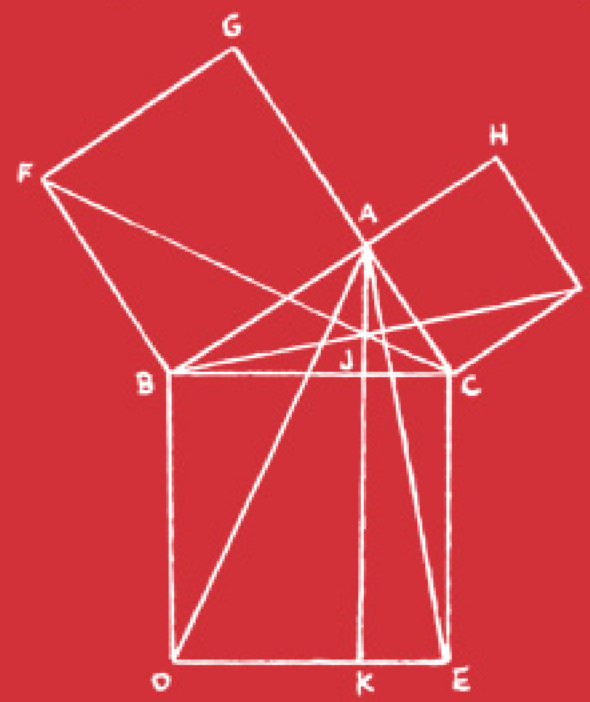
ALEXANDRE KHA

LE THÉORÈME FUNESTE



$$\frac{z+y}{2} = a^2 \qquad \frac{x+iy}{z} = \frac{a+ib}{a-ib} = \frac{(a^2-b^2)+i\,2ab}{a^2+b^2}$$

$$x^2 = 2ab \qquad y^2 = a^2 - b^2 \qquad z = a^2 + b^2$$



$$\mathbb{Z}[\zeta] = \{a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_{l-2}\zeta^{l-2} : a_i \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "\phi_i"'] \arrow[dr, "\phi_j"] & \\ G_i \arrow[rr, "\pi_{ij}"'] & & G_j \end{tikzcd}$$

$$\Delta = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n.$$

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$$

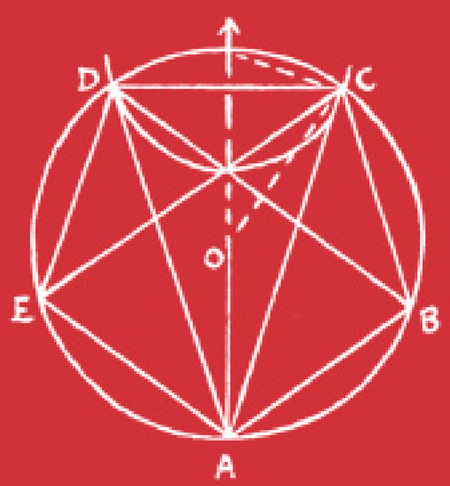
$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & & J \arrow[dl, "\psi_i"] \\ & G_i & \end{tikzcd}$$

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

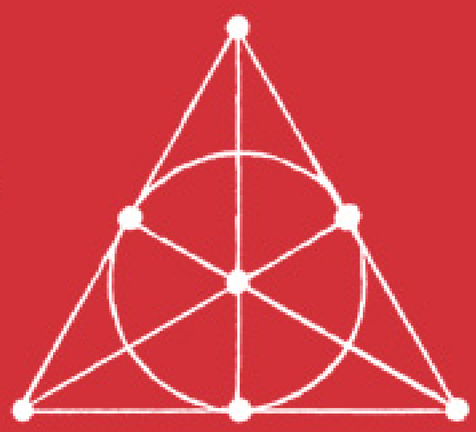
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_i|_X"'] \arrow[dr, "\pi_j|_X"] & \\ G_i \arrow[rr, "\pi_{ij}"'] & & G_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & & X \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & G_i & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Gal(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \arrow[r] \arrow[dr] & Gal(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/n \arrow[d, "\pi_{nm}"] \\ & Gal(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/m \end{tikzcd}$$

$$\varprojlim G_i = \bigcap_{i \geq j}\{c \in \textstyle\prod G_i : \pi_{ij}(\pi_i(c)) = \pi_j(c)\} \qquad Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$$



$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ k \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & k \end{tikzcd} \qquad W(k)[[T_1,\ldots,T_m]]/(\text{ideal})$$



$$\mathbb{Z}_p - \{0\} = \{p^n u \mid n \geq 0, u \text{ is a unit}\}$$

$$\mathbb{Q}_p - \{0\} = \{p^n u \mid u \text{ is a unit in } \mathbb{Z}_p\}$$

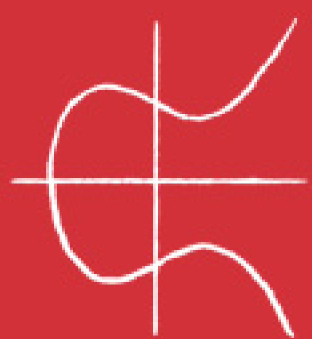
$$ef = n = [K : \mathbb{Q}_p]. \qquad w(x+y) \geq \min(w(x), w(y)) \qquad \frac{\sigma(\pi')}{\pi'} = \frac{\sigma(\pi)}{\pi}\frac{\sigma(u)}{u}$$

$$\text{(b) } \sigma \in G_i \longleftrightarrow w(\sigma(\pi) - \pi) \geq i + 1 \longleftrightarrow \sigma(\pi)/\pi \in U_i \qquad \frac{\sigma\tau(\pi)}{\pi} = \frac{\sigma(\pi)}{\pi}\frac{\tau(\pi)}{\pi}\frac{\sigma(u)}{u}$$

$$\wp(z;\Lambda) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \qquad (\mathbb{Z}/N)^\times \to \mathbb{C}^\times \qquad \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

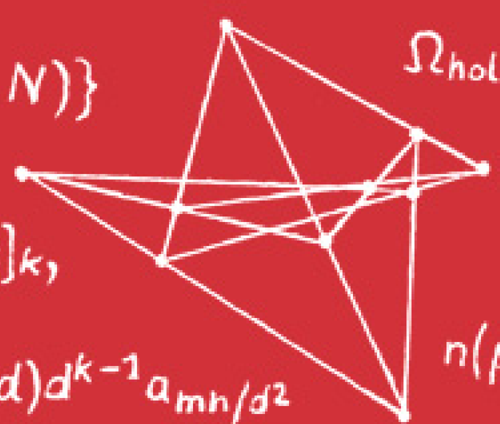
$$\Gamma_0(N) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}\right\} \qquad \text{For } \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \mid d \equiv 1 \pmod{N}\right\}$$



$$\Omega_{hol}(X_0(N)) \to S_2(N)$$

$$f(z)dz \mapsto f(z)$$



$$T_m f = m^{(k/2)-1}\sum_j f|[\alpha_j]_k,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n, \text{ where } b_n = \sum_{d|(m,n)} \epsilon(d)d^{k-1}a_{mn/d^2}$$

$$n(p.\bar{p}) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\dim(V/V_i)}{|\mathcal{G}_0/\mathcal{G}_i|}$$

$$0 \to H^1_{\mathcal{L}}(G_{\mathbb{Q}}, M) \to H^1(G_{\mathbb{Q}S}, M) \to \oplus_{p \in S} H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, M)/L_p. \qquad \rho(I_q) = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$$

Ceci est la version numérique de l'ouvrage *Le théorème funeste* d'Alexandre Kha, paru en 2019 aux éditions Tanibis et toujours disponible en librairies ou à l'adresse **www.tanibis.net/livres/le-theoreme-funeste**.

Vous pouvez librement lire en ligne ou télécharger ce livre numérique au format pdf, ainsi que le partager sans en modifier le contenu dans le cadre d'une démarche non commerciale.

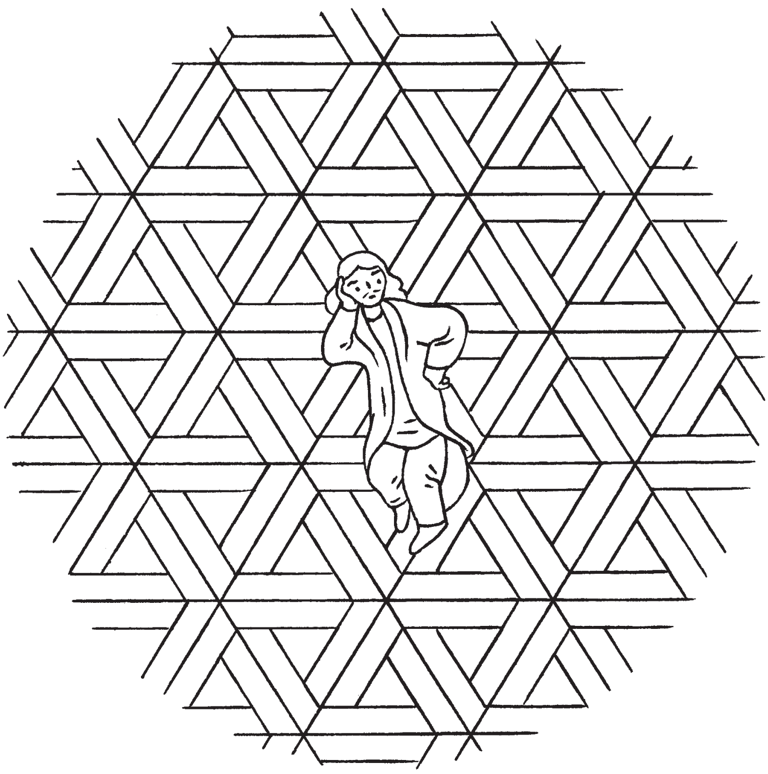
Pour tout autre usage merci de nous contacter.

Nous espérons que cette lecture vous donnera envie d'acheter nos livres. Vous pouvez également soutenir Tanibis et les auteurs qui acceptent de mettre à disposition leurs œuvres en **faisant un don**.

www.tanibis.net

ALEXANDRE KHA

LE THÉORÈME FUNESTE



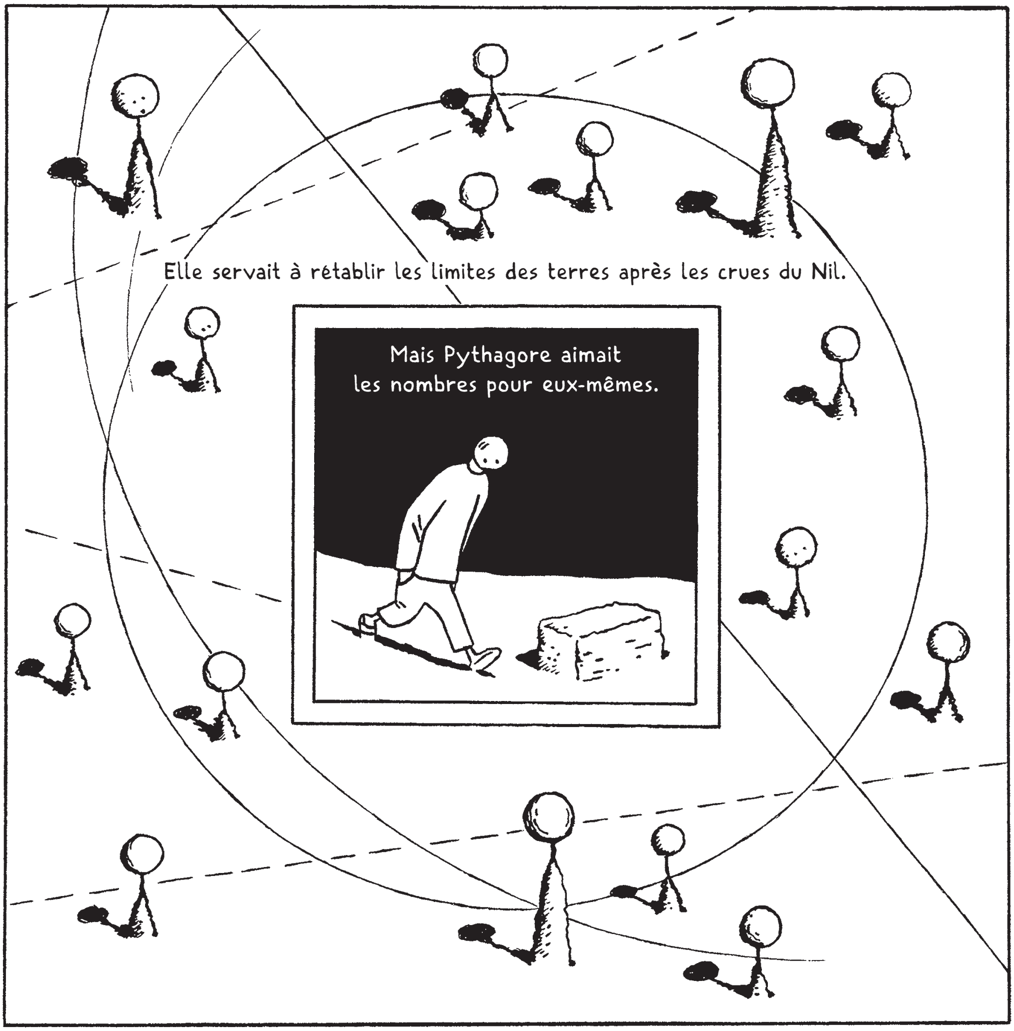
Éditions Tanibis

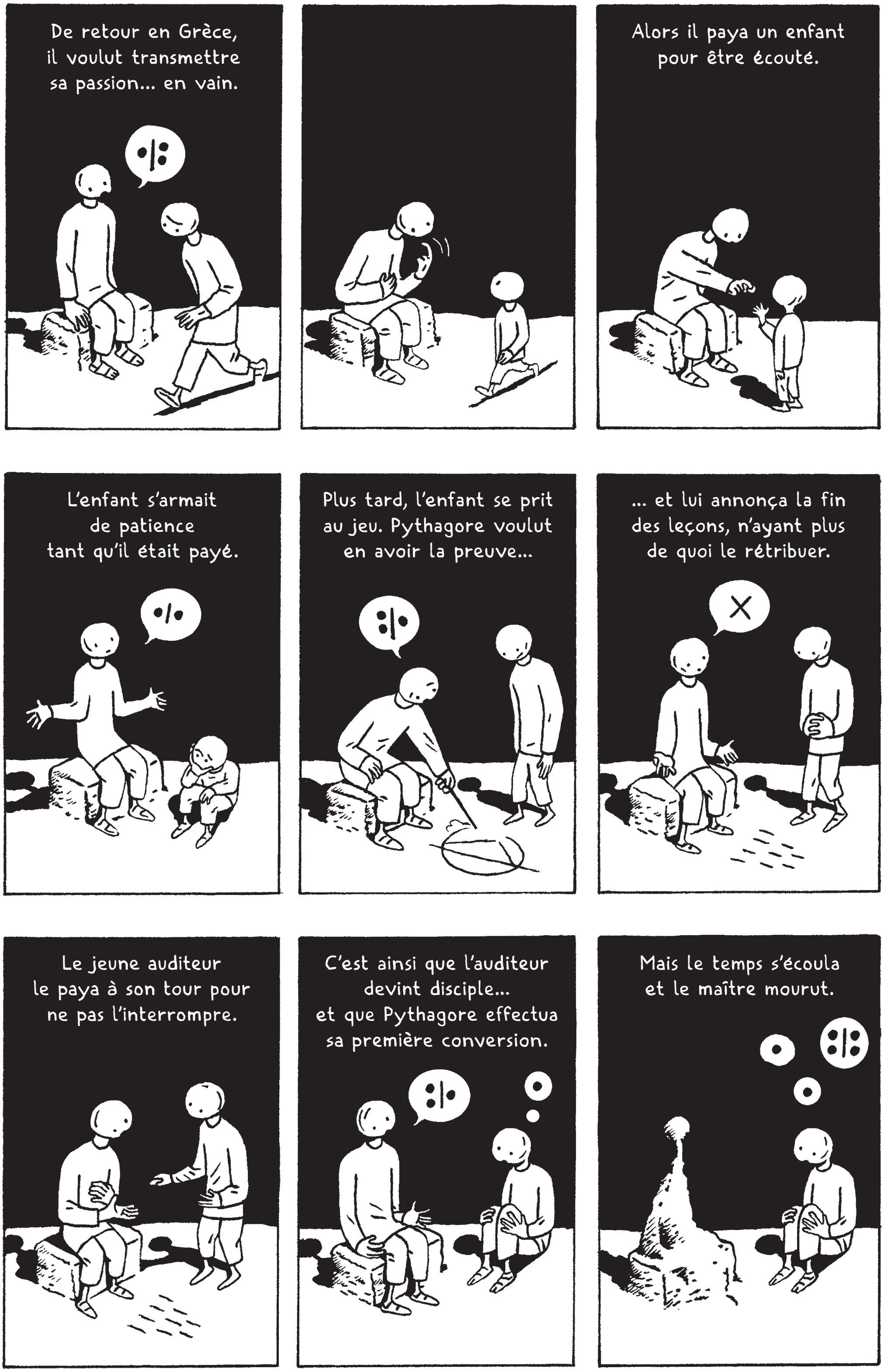
La citation d'Andrew Wiles p. 44 est extraite du documentaire
de Simon Singh *Le dernier théorème de Fermat* (BBC, 1997).

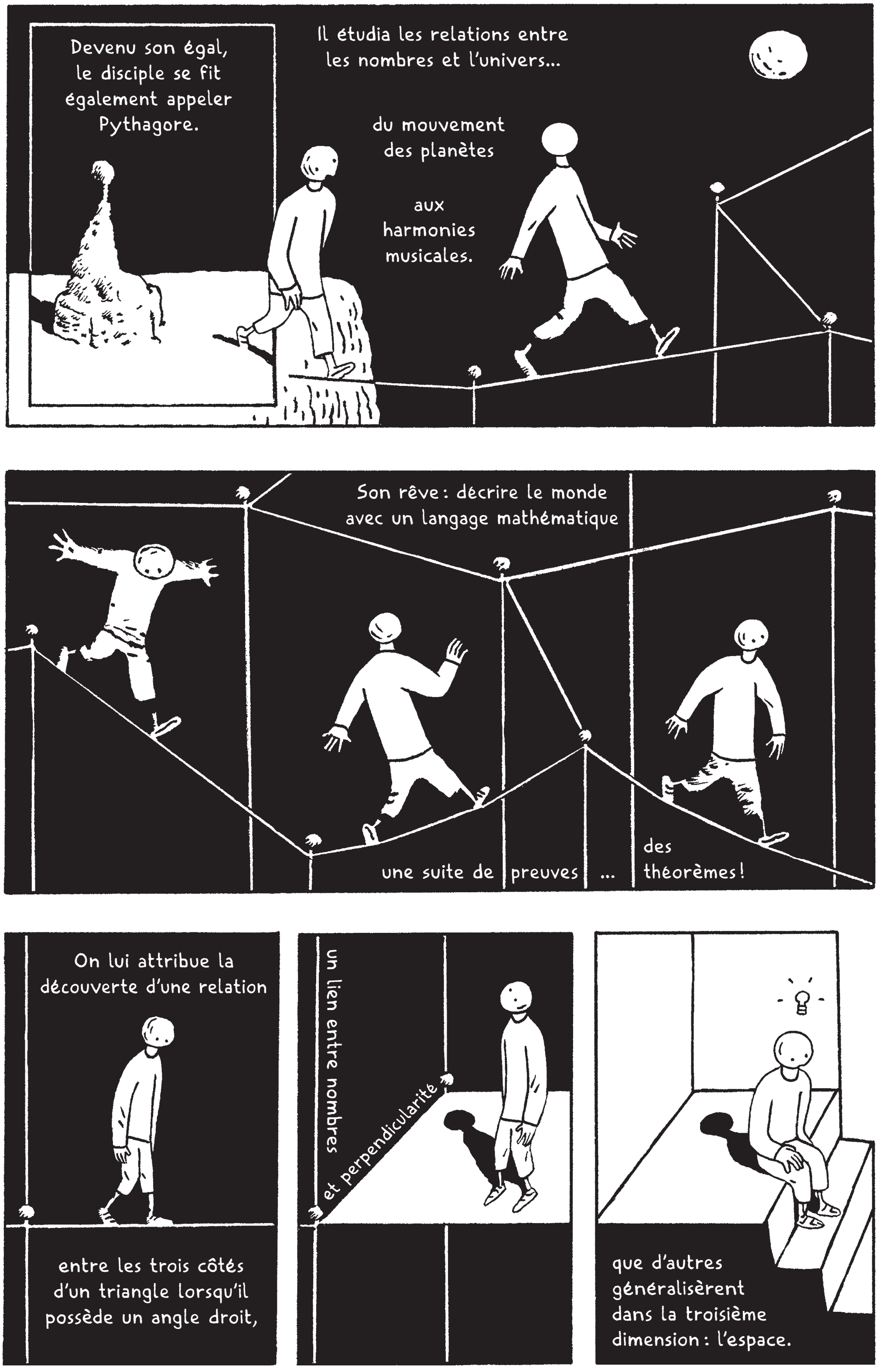
Merci à Madani et Nicolas Fresneau.
Imprimé en République tchèque — Dépôt légal : avril 2019 — ISBN : 978–2–84841–051–7

Éditions Tanibis
19, rue Francis-Chirat, 69100 Villeurbanne, France
editions@tanibis.net — www.tanibis.net

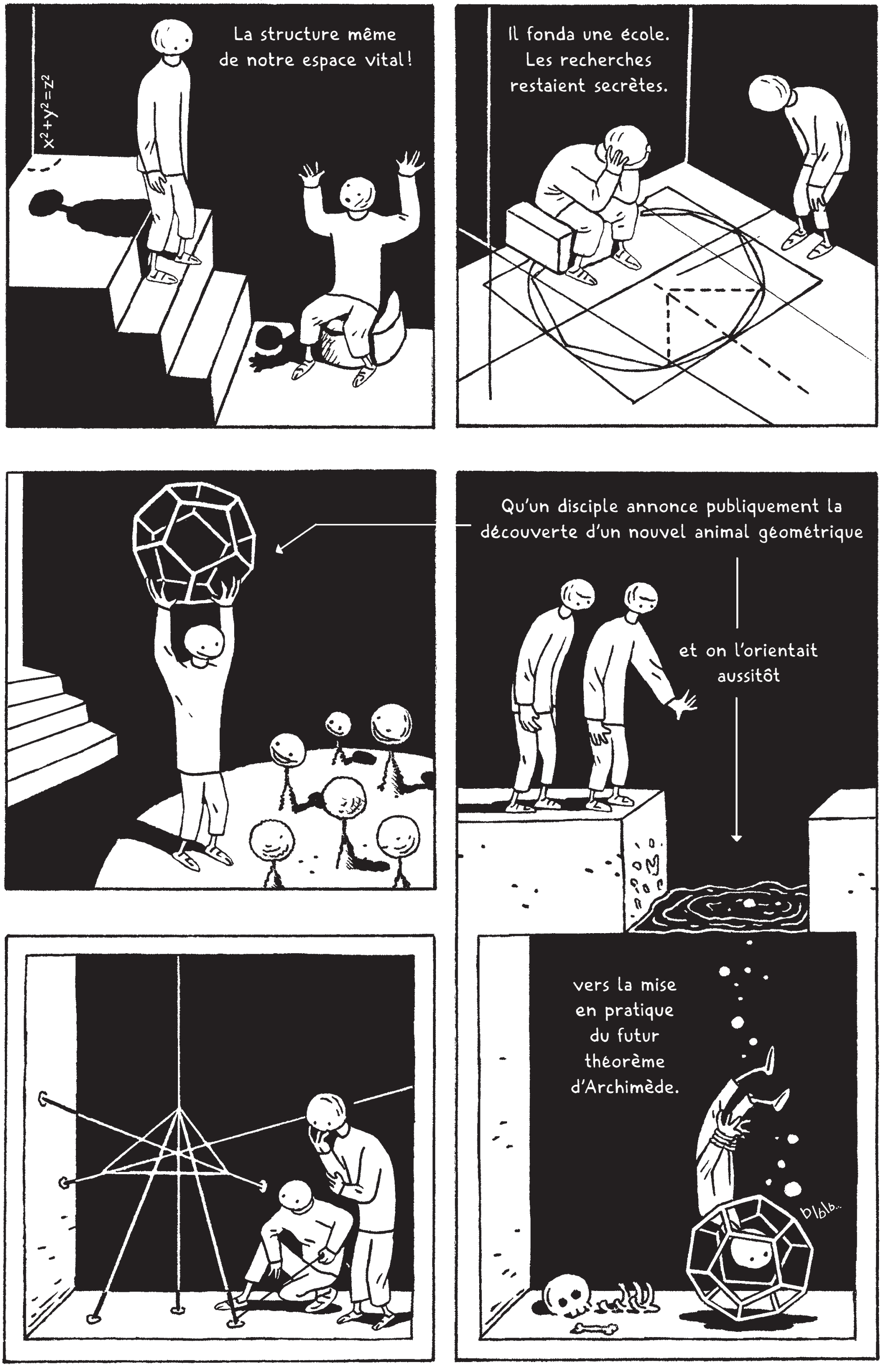

%
%
%
C'est en Égypte que Pythagore apprit la logique numérique.
?


Elle servait à rétablir les limites des terres après les crues du Nil.
Mais Pythagore aimait les nombres pour eux-mêmes.

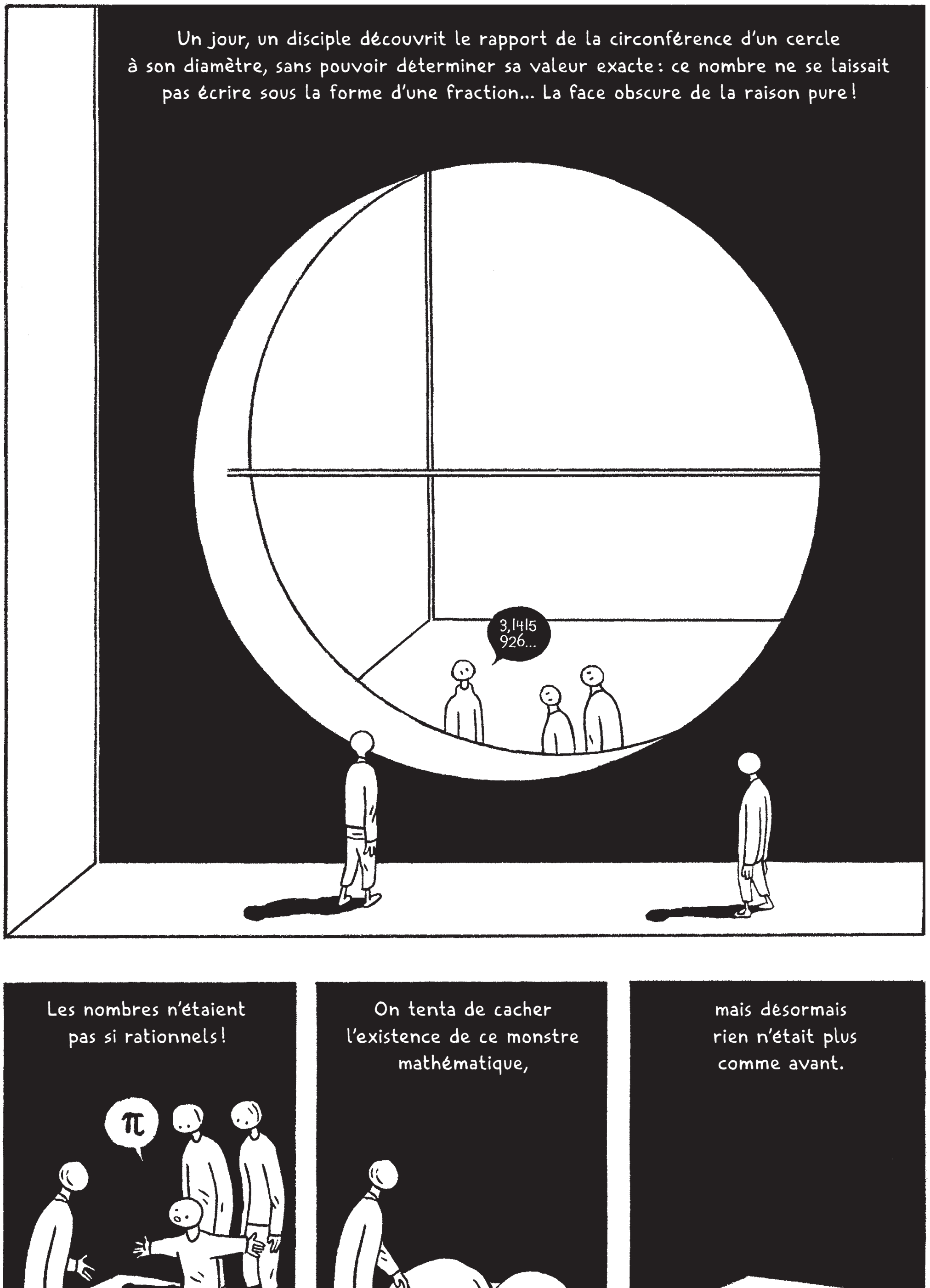

De retour en Grèce, il voulut transmettre sa passion… en vain.
Alors il paya un enfant pour être écouté.
L'enfant s'armait de patience tant qu'il était payé.
Plus tard, l'enfant se prit au jeu. Pythagore voulut en avoir la preuve…
… et lui annonça la fin des leçons, n'ayant plus de quoi le rétribuer.
Le jeune auditeur le paya à son tour pour ne pas l'interrompre.
C'est ainsi que l'auditeur devint disciple… et que Pythagore effectua sa première conversion.
Mais le temps s'écoula et le maître mourut.

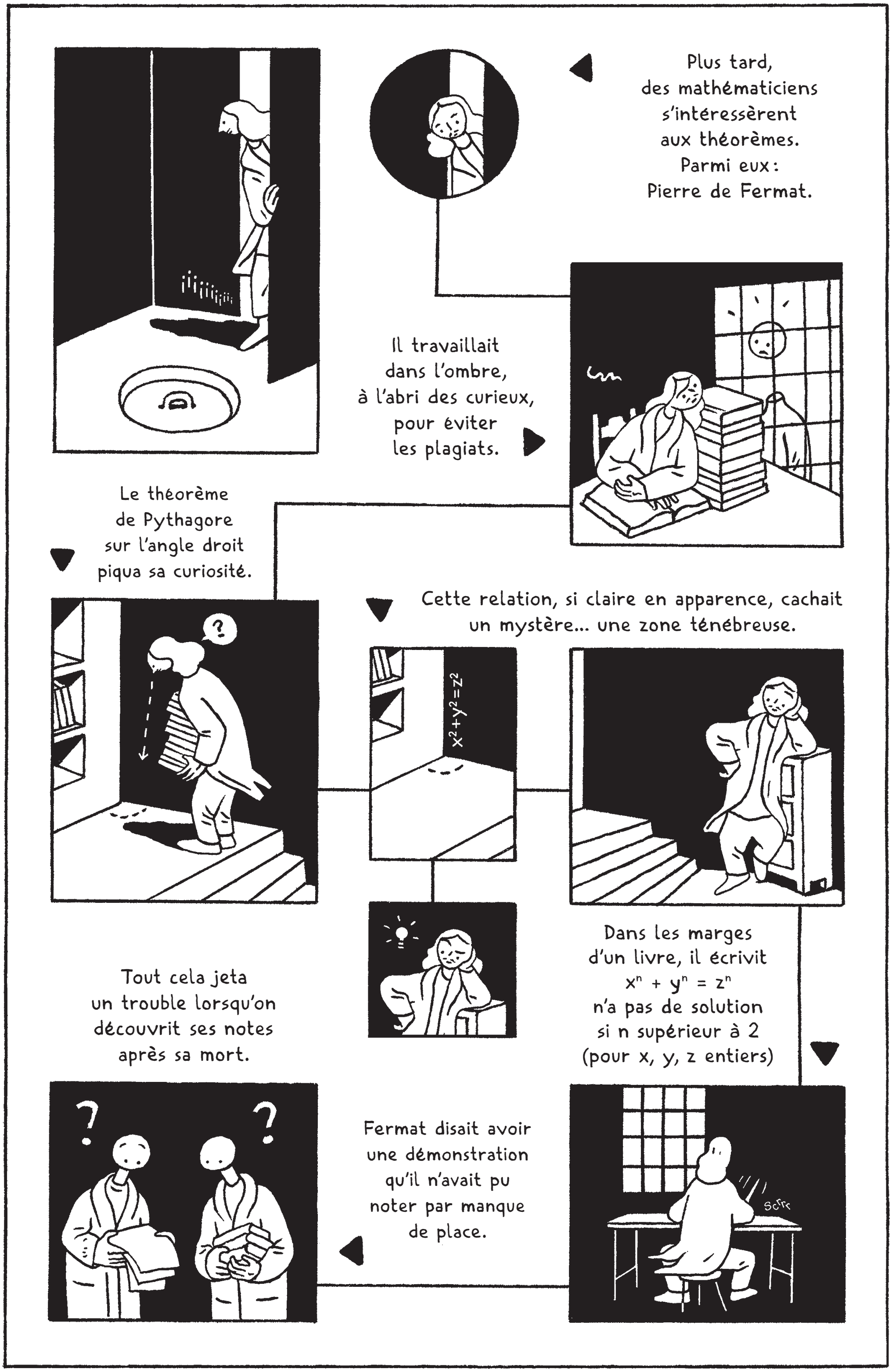


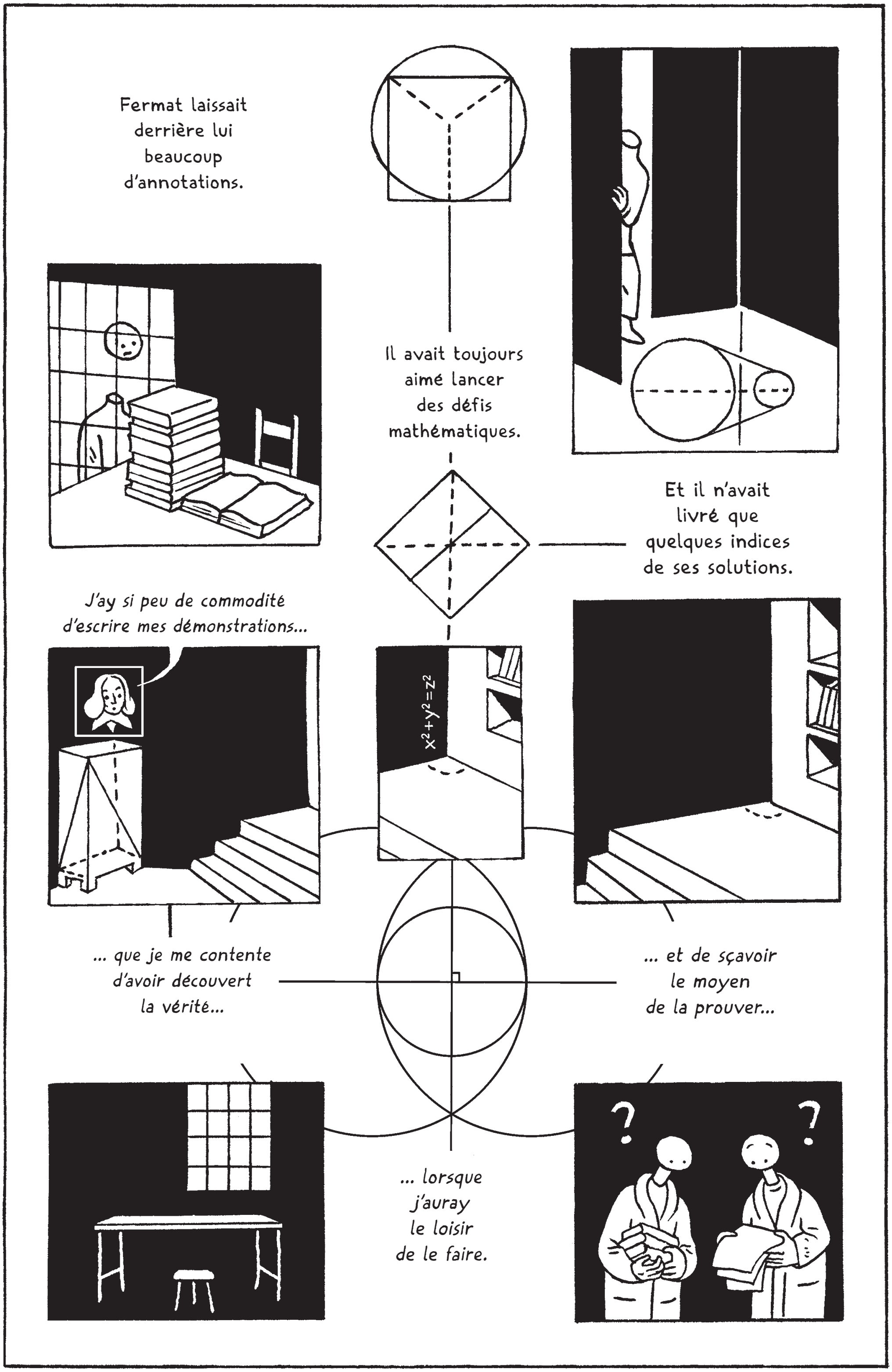
Devenu son égal, le disciple se fit également appeler Pythagore.
Il étudia les relations entre les nombres et l'univers...
du mouvement des planètes
aux harmonies musicales.
Son rêve : décrire le monde avec un langage mathématique
une suite de
preuves
...
des théorèmes !
On lui attribue la découverte d'une relation
entre les trois côtés d'un triangle lorsqu'il possède un angle droit,
un lien entre nombres
et perpendicularité
que d'autres généralisèrent dans la troisième dimension : l'espace.

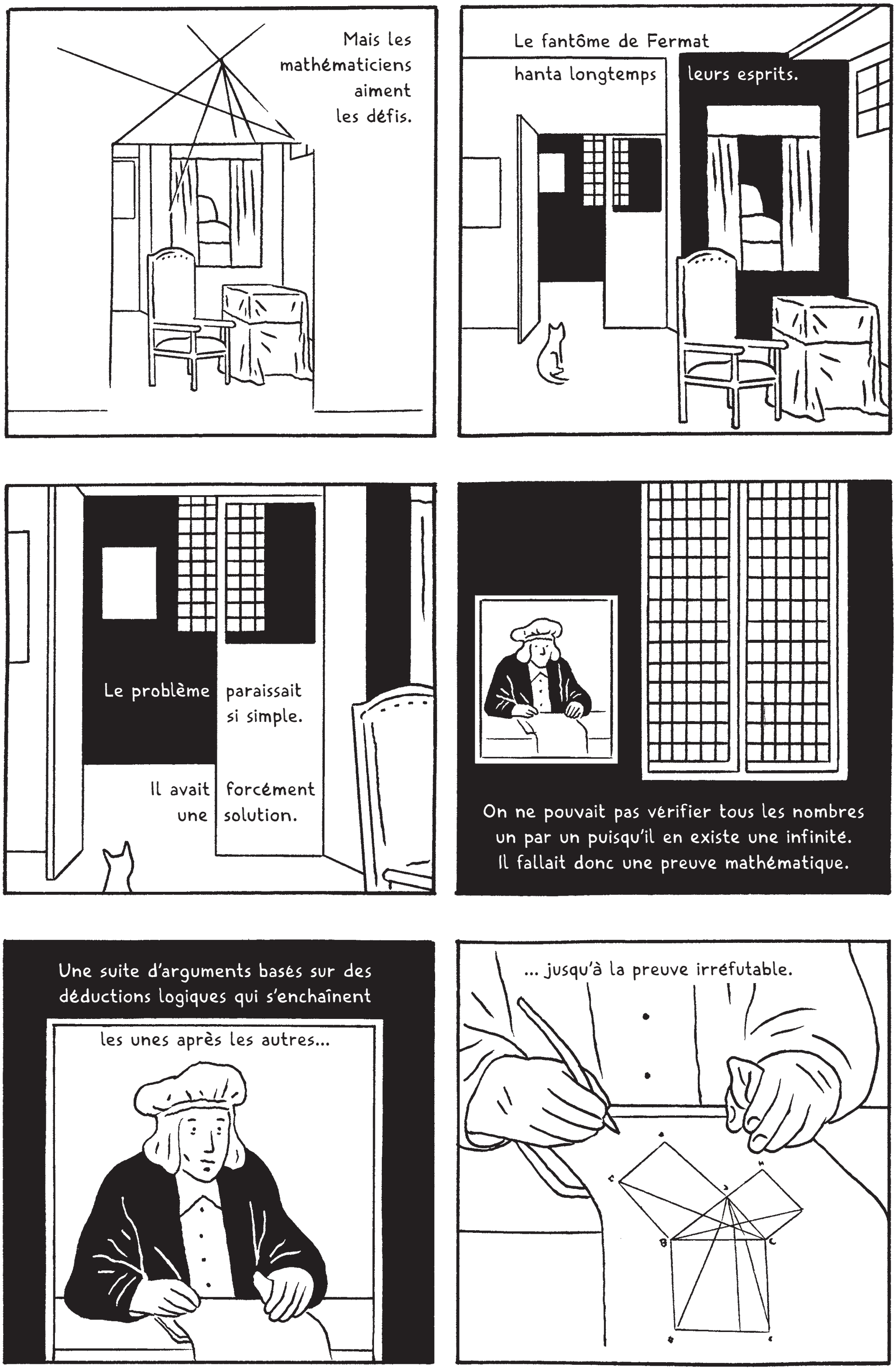


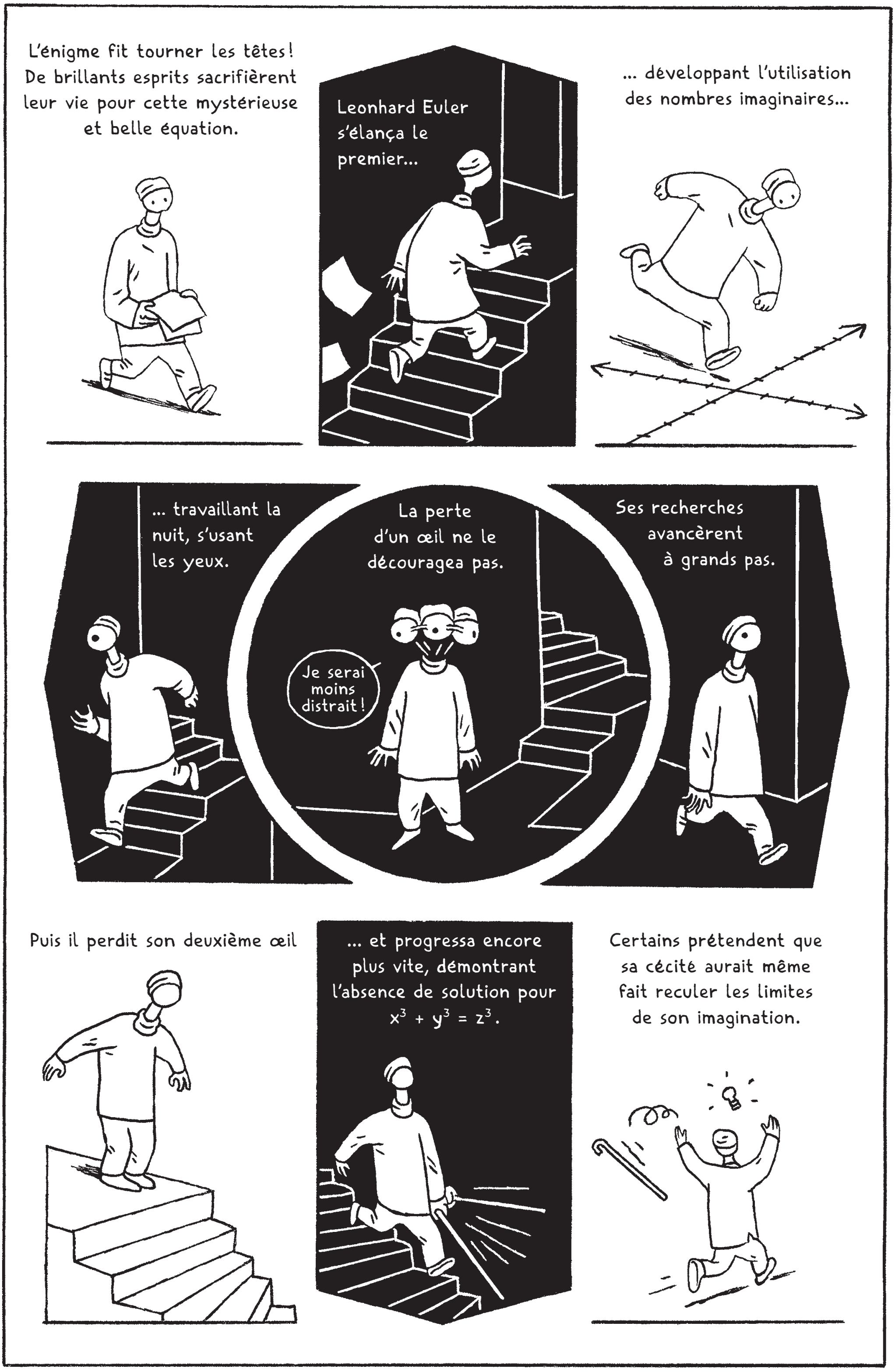
$x^2+y^2=z^2$
La structure même de notre espace vital !
Il fonda une école. Les recherches restaient secrètes.
Qu'un disciple annonce publiquement la découverte d'un nouvel animal géométrique
et on l'orientait aussitôt
vers la mise en pratique du futur théorème d'Archimède.
blblb..


Un jour, un disciple découvrit le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, sans pouvoir déterminer sa valeur exacte : ce nombre ne se laissait pas écrire sous la forme d'une fraction... La face obscure de la raison pure !
3,1415 926...
Les nombres n'étaient pas si rationnels !
π
On tenta de cacher l'existence de ce monstre mathématique,
blblb...
mais désormais rien n'était plus comme avant.

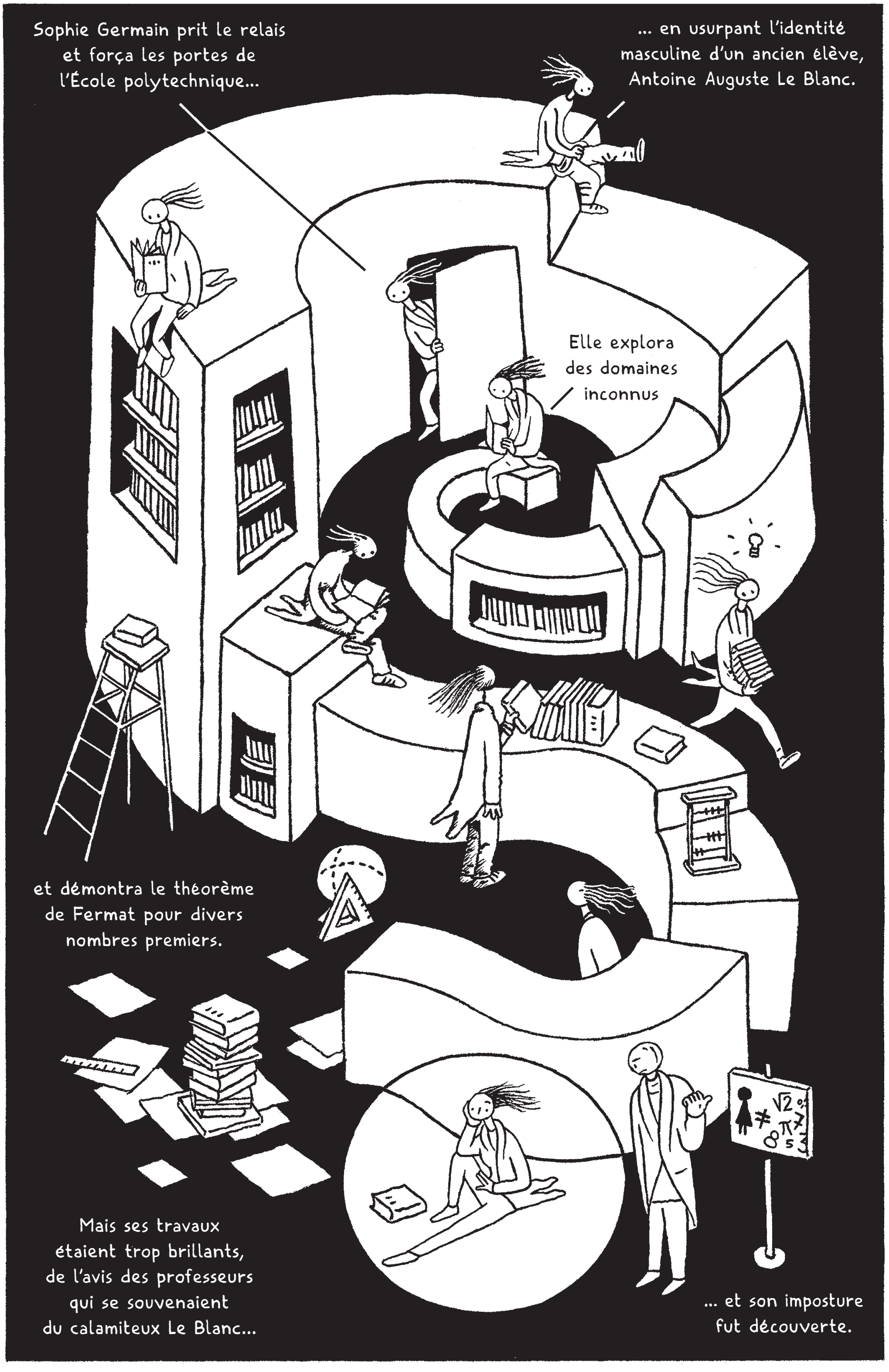

Plus tard, des mathématiciens s'intéressèrent aux théorèmes. Parmi eux : Pierre de Fermat.
Il travaillait dans l'ombre, à l'abri des curieux, pour éviter les plagiats.
Le théorème de Pythagore sur l'angle droit piqua sa curiosité.
?
Cette relation, si claire en apparence, cachait un mystère… une zone ténébreuse.
$x^2+y^2=z^2$
Dans les marges d'un livre, il écrivit $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution si n supérieur à 2 (pour x, y, z entiers)
Fermat disait avoir une démonstration qu'il n'avait pu noter par manque de place.
Tout cela jeta un trouble lorsqu'on découvrit ses notes après sa mort.
?
?

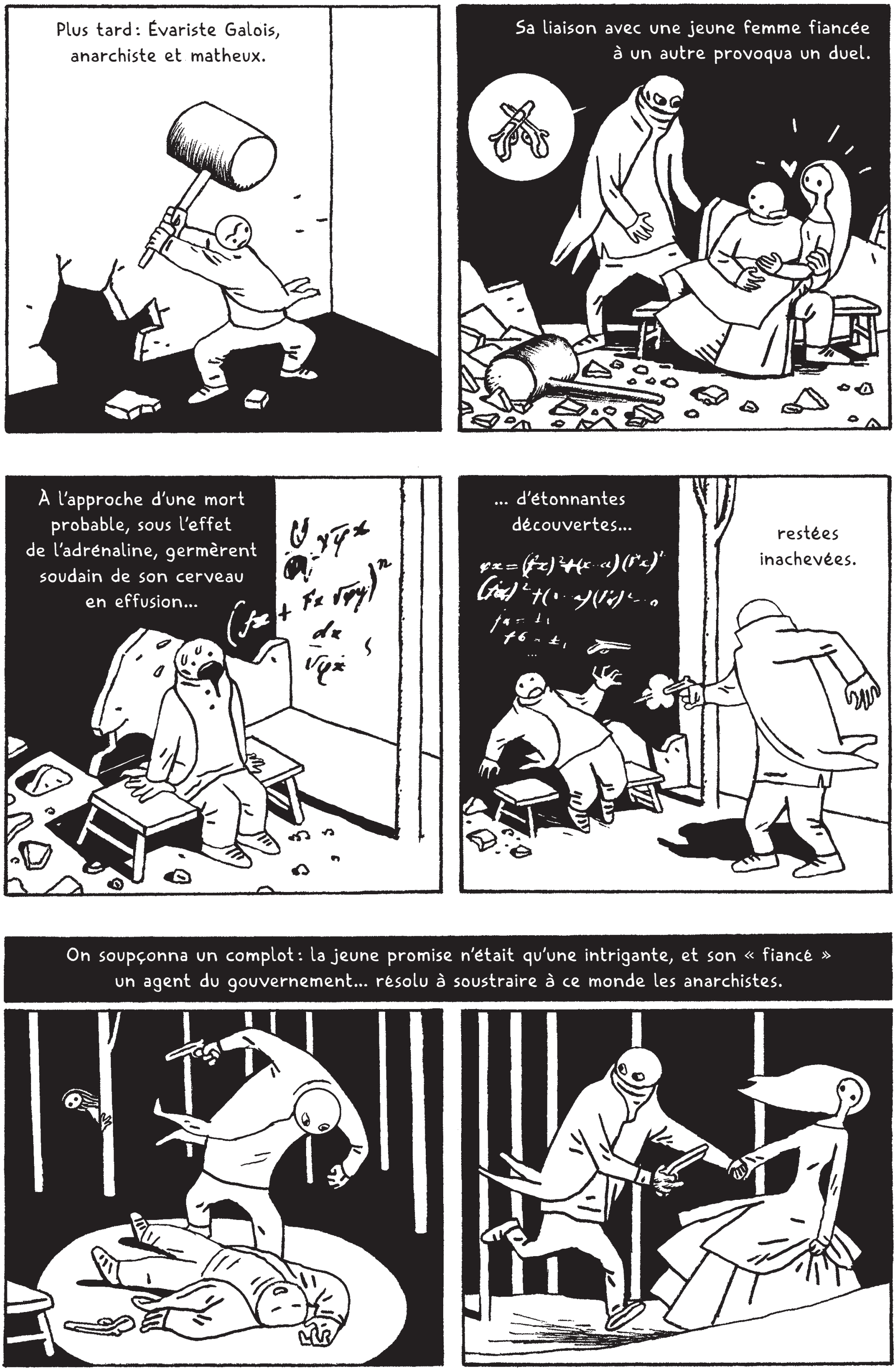

Fermat laissait derrière lui beaucoup d'annotations.
Il avait toujours aimé lancer des défis mathématiques.
Et il n'avait livré que quelques indices de ses solutions.
J'ay si peu de commodité d'escrire mes démonstrations...
$x^2+y^2=z^2$
... que je me contente d'avoir découvert la vérité...
... et de sçavoir le moyen de la prouver...
... lorsque j'auray le loisir de le faire.
?
?

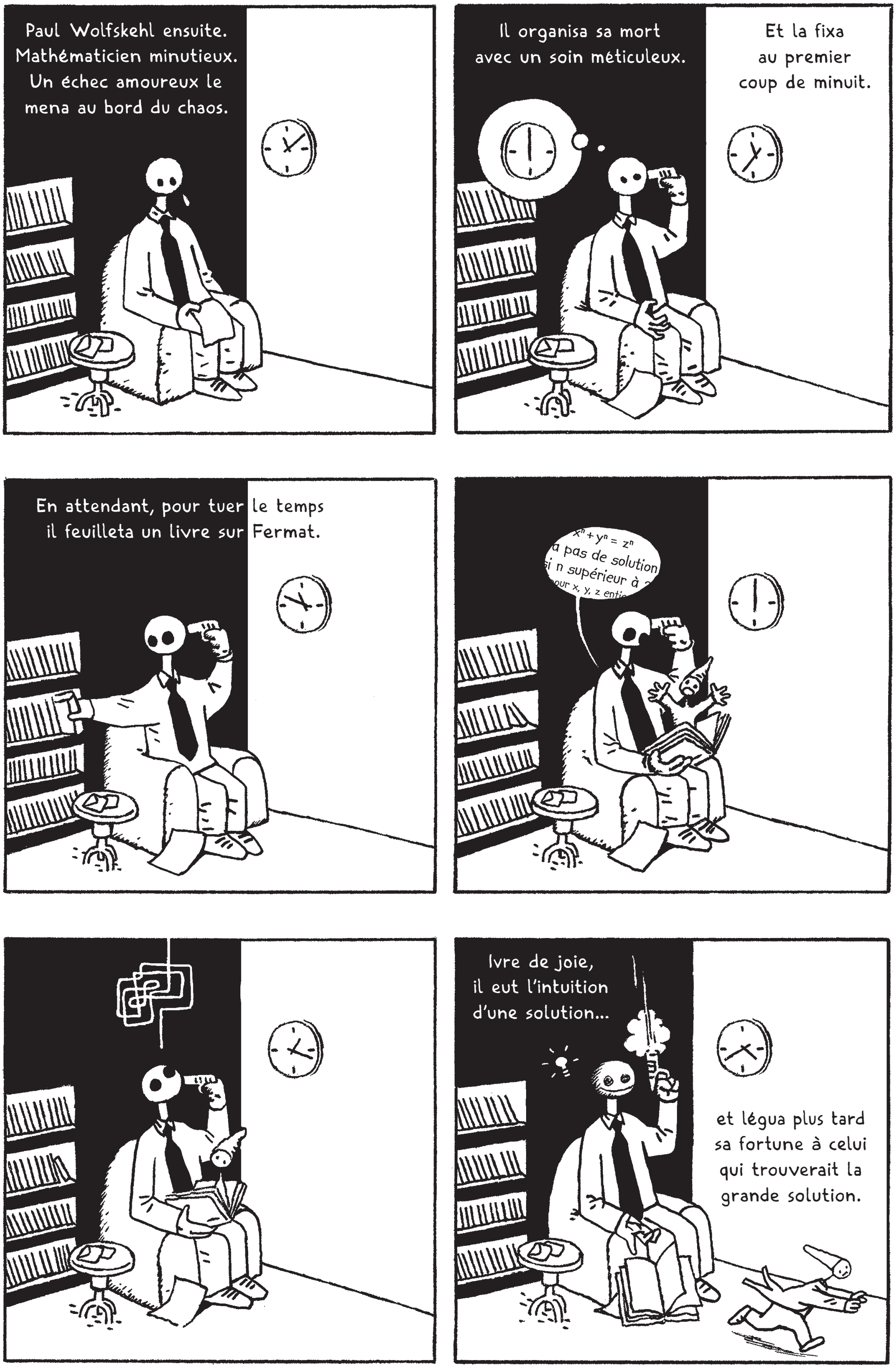

Mais les mathématiciens aiment les défis.
Le fantôme de Fermat
hanta longtemps
leurs esprits.
Le problème
paraissait si simple.
Il avait une
forcément solution.
On ne pouvait pas vérifier tous les nombres un par un puisqu'il en existe une infinité. Il fallait donc une preuve mathématique.
Une suite d'arguments basés sur des déductions logiques qui s'enchaînent
les unes après les autres…
… jusqu'à la preuve irréfutable.

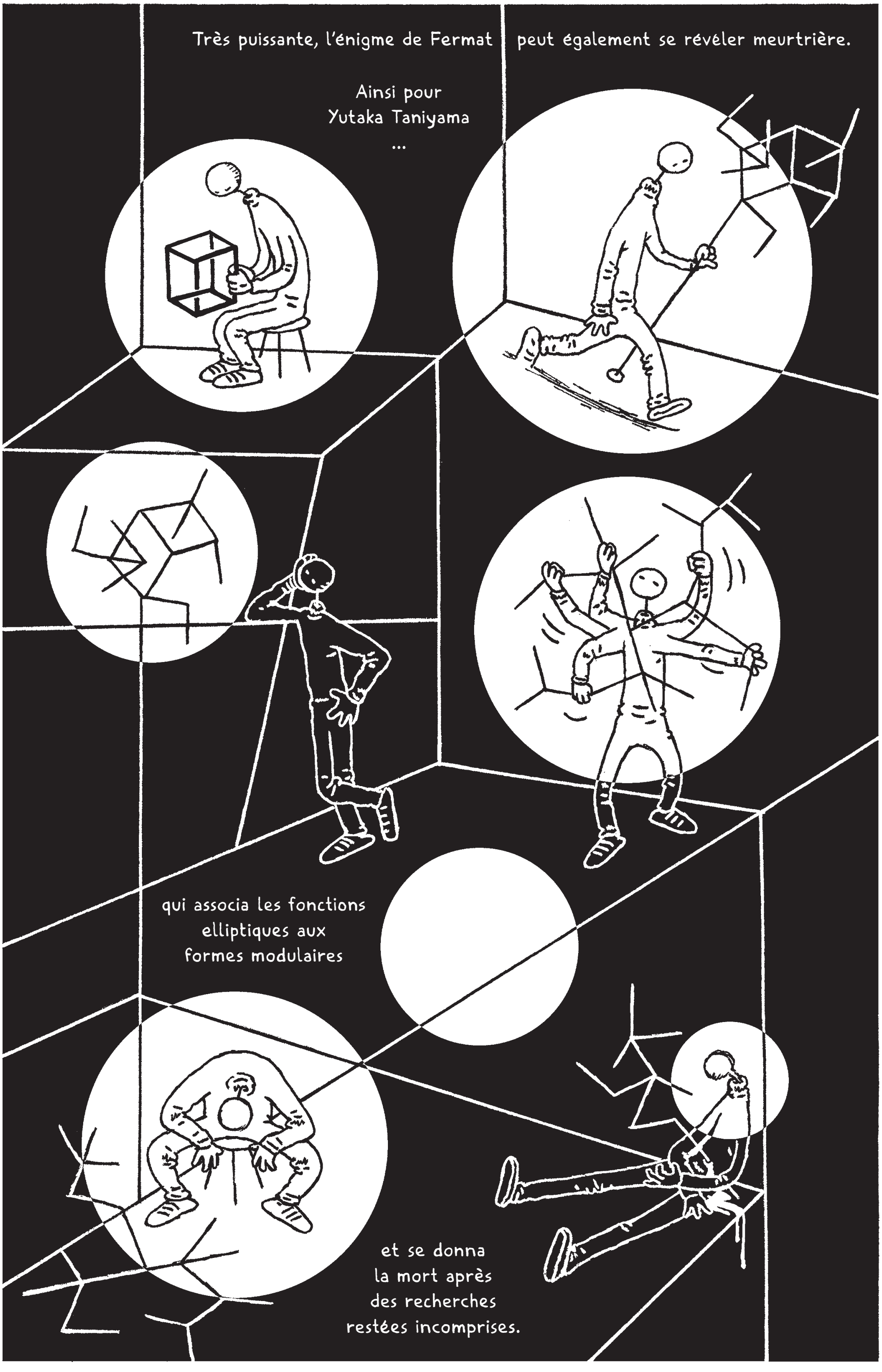


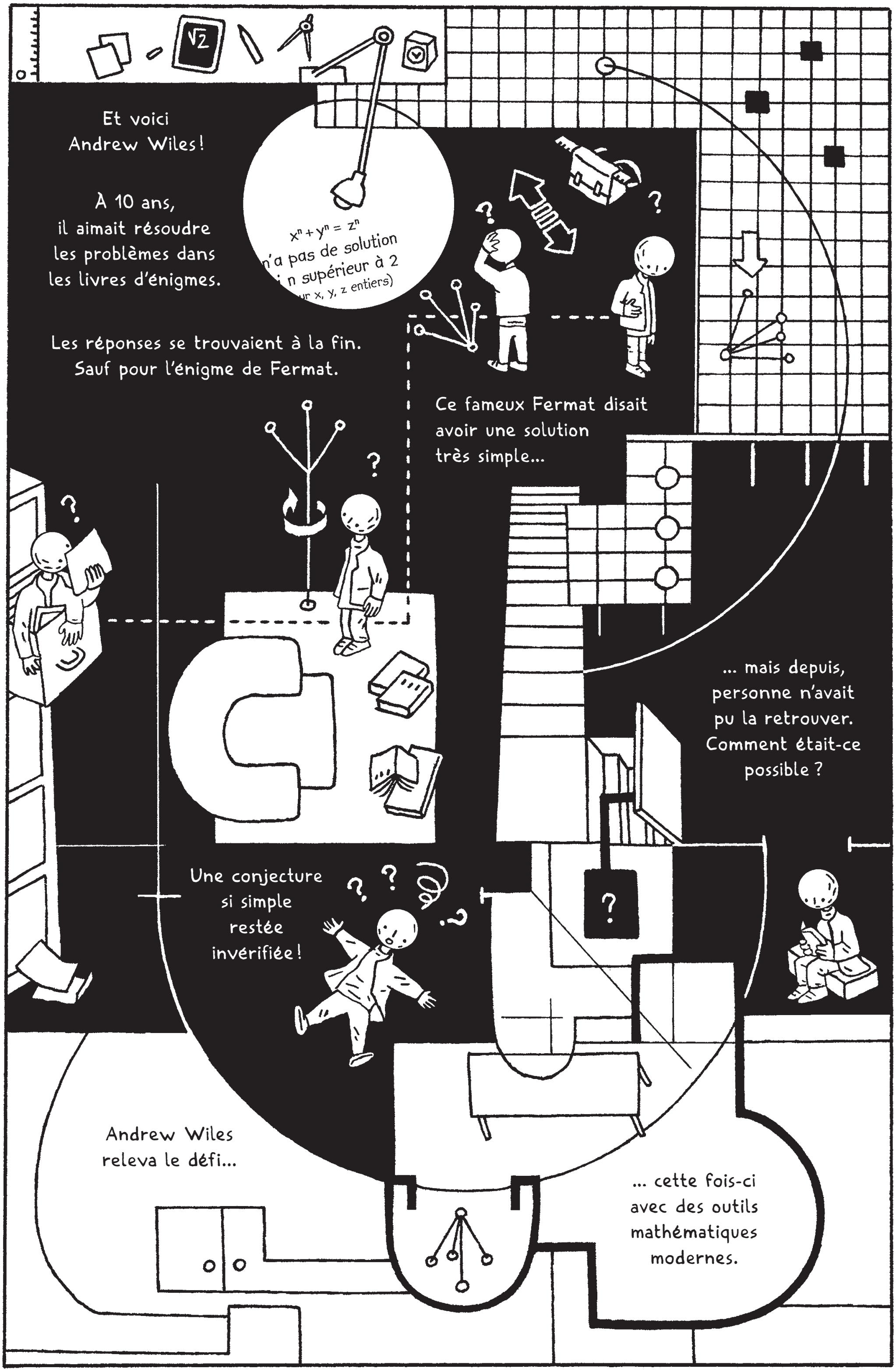
L'énigme fit tourner les têtes! De brillants esprits sacrifièrent leur vie pour cette mystérieuse et belle équation.
Leonhard Euler s'élança le premier...
... développant l'utilisation des nombres imaginaires...
... travaillant la nuit, s'usant les yeux.
La perte d'un œil ne le découragea pas.
Je serai moins distrait !
Ses recherches avancèrent à grands pas.
Puis il perdit son deuxième œil
... et progressa encore plus vite, démontrant l'absence de solution pour $x^3 + y^3 = z^3$.
Certains prétendent que sa cécité aurait même fait reculer les limites de son imagination.


Sophie Germain prit le relais et força les portes de l'École polytechnique...
... en usurpant l'identité masculine d'un ancien élève, Antoine Auguste Le Blanc.
Elle explora des domaines inconnus
et démontra le théorème de Fermat pour divers nombres premiers.
Mais ses travaux étaient trop brillants, de l'avis des professeurs qui se souvenaient du calamiteux Le Blanc...
... et son imposture fut découverte.

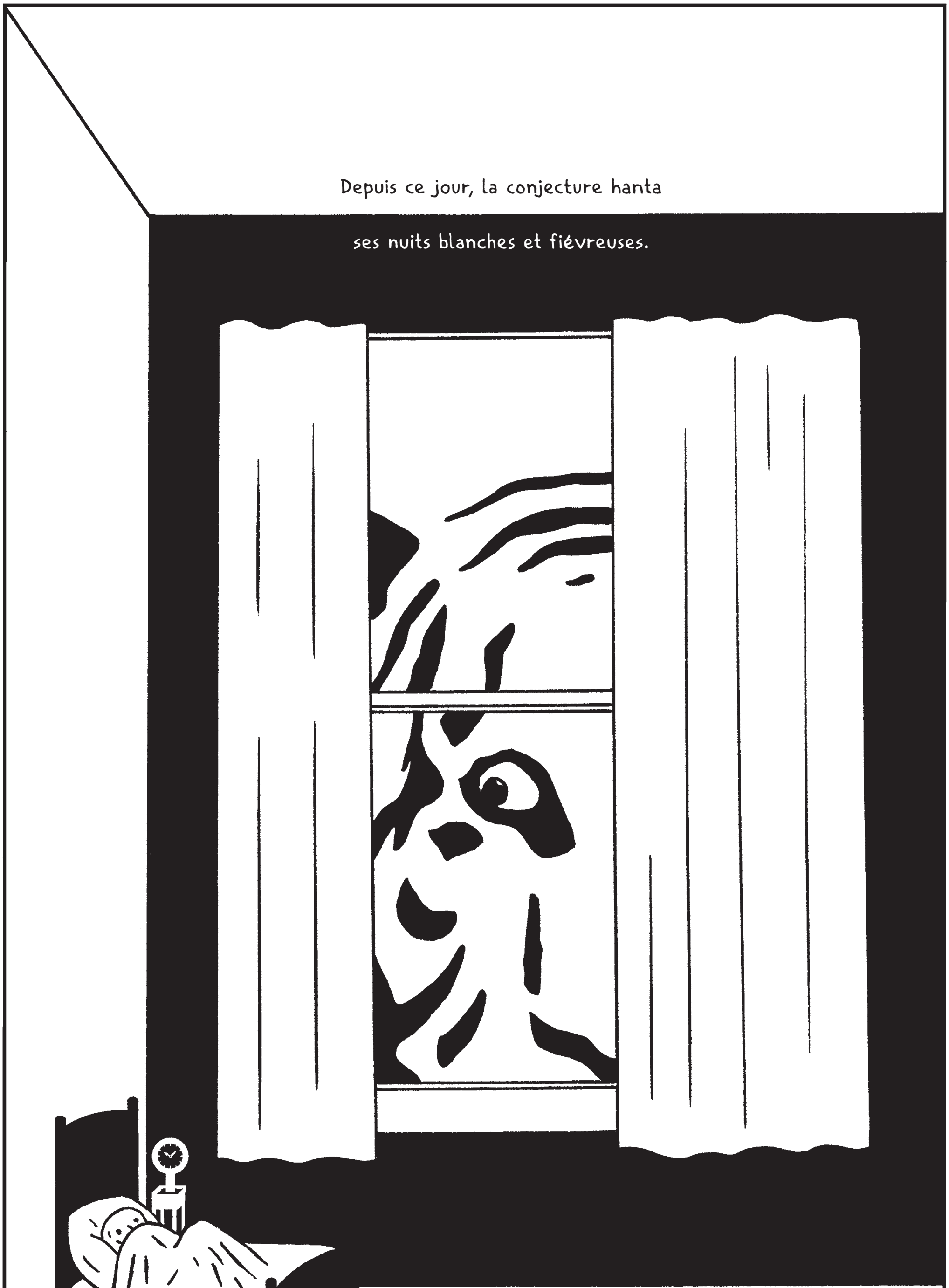

Plus tard : Évariste Galois, anarchiste et matheux.
Sa liaison avec une jeune femme fiancée à un autre provoqua un duel.
À l'approche d'une mort probable, sous l'effet de l'adrénaline, germèrent soudain de son cerveau en effusion…
… d'étonnantes découvertes…
restées inachevées.
On soupçonna un complot : la jeune promise n'était qu'une intrigante, et son « fiancé » un agent du gouvernement… résolu à soustraire à ce monde les anarchistes.

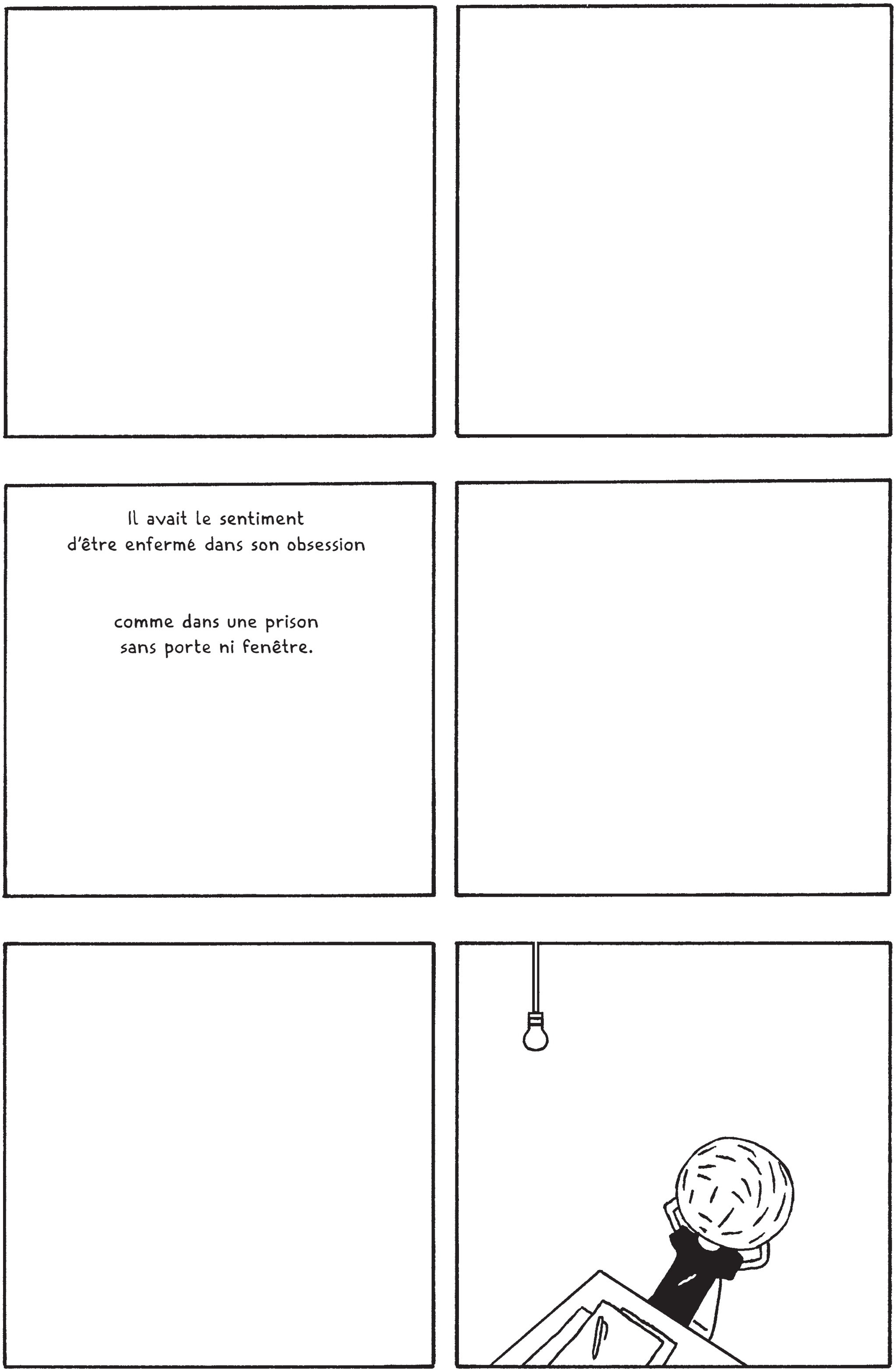

Paul Wolfskehl ensuite. Mathématicien minutieux. Un échec amoureux le mena au bord du chaos.
Il organisa sa mort avec un soin méticuleux.
Et la fixa au premier coup de minuit.
En attendant, pour tuer le temps il feuilleta un livre sur Fermat.
$x^n + y^n = z^n$
a pas de solution
n supérieur à
Ivre de joie, il eut l'intuition d'une solution...
et légua plus tard sa fortune à celui qui trouverait la grande solution.

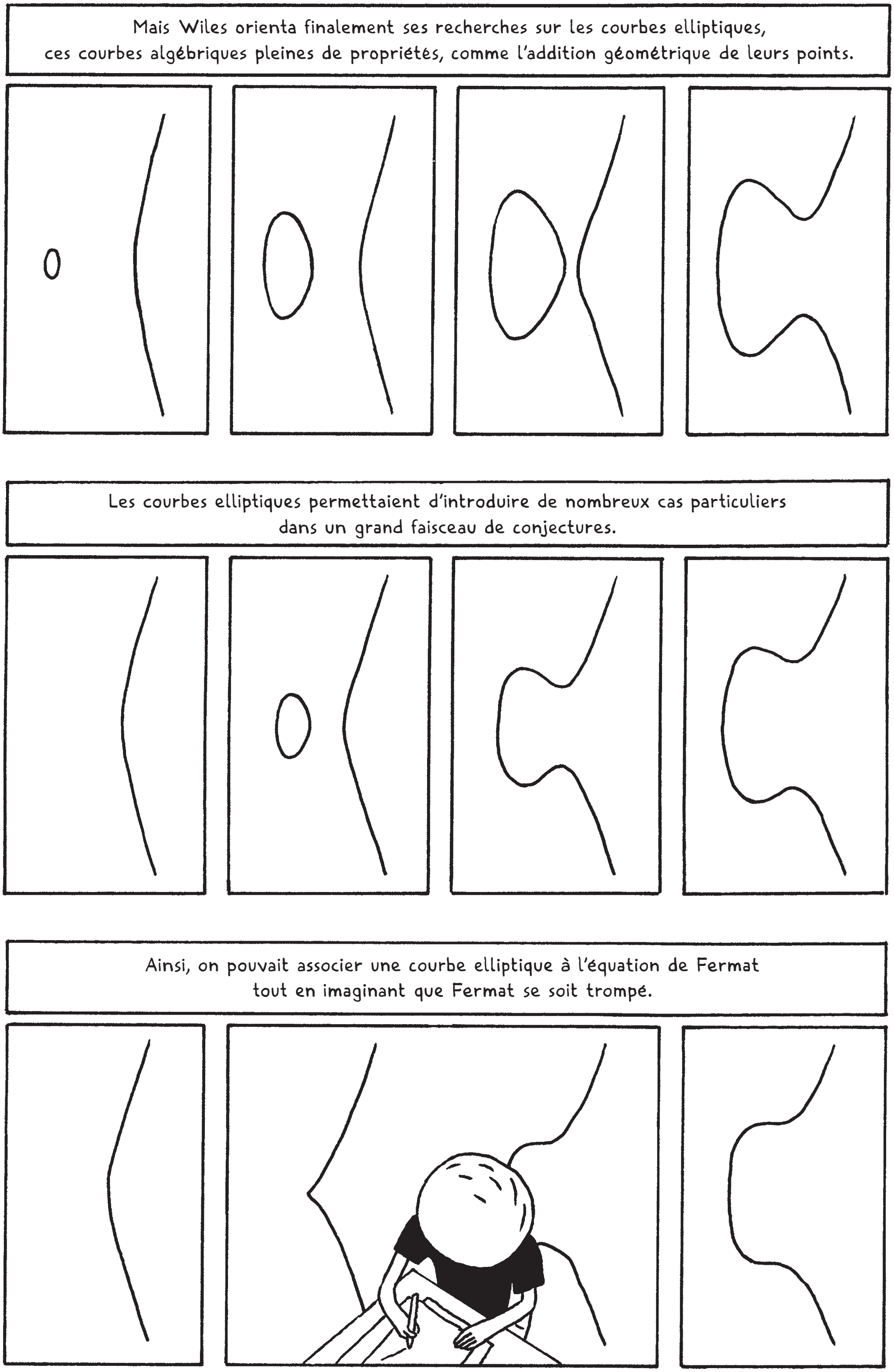

Très puissante, l'énigme de Fermat
peut également se révéler meurtrière.
Ainsi pour Yutaka Taniyama ...
qui associa les fonctions elliptiques aux formes modulaires
et se donna la mort après des recherches restées incomprises.

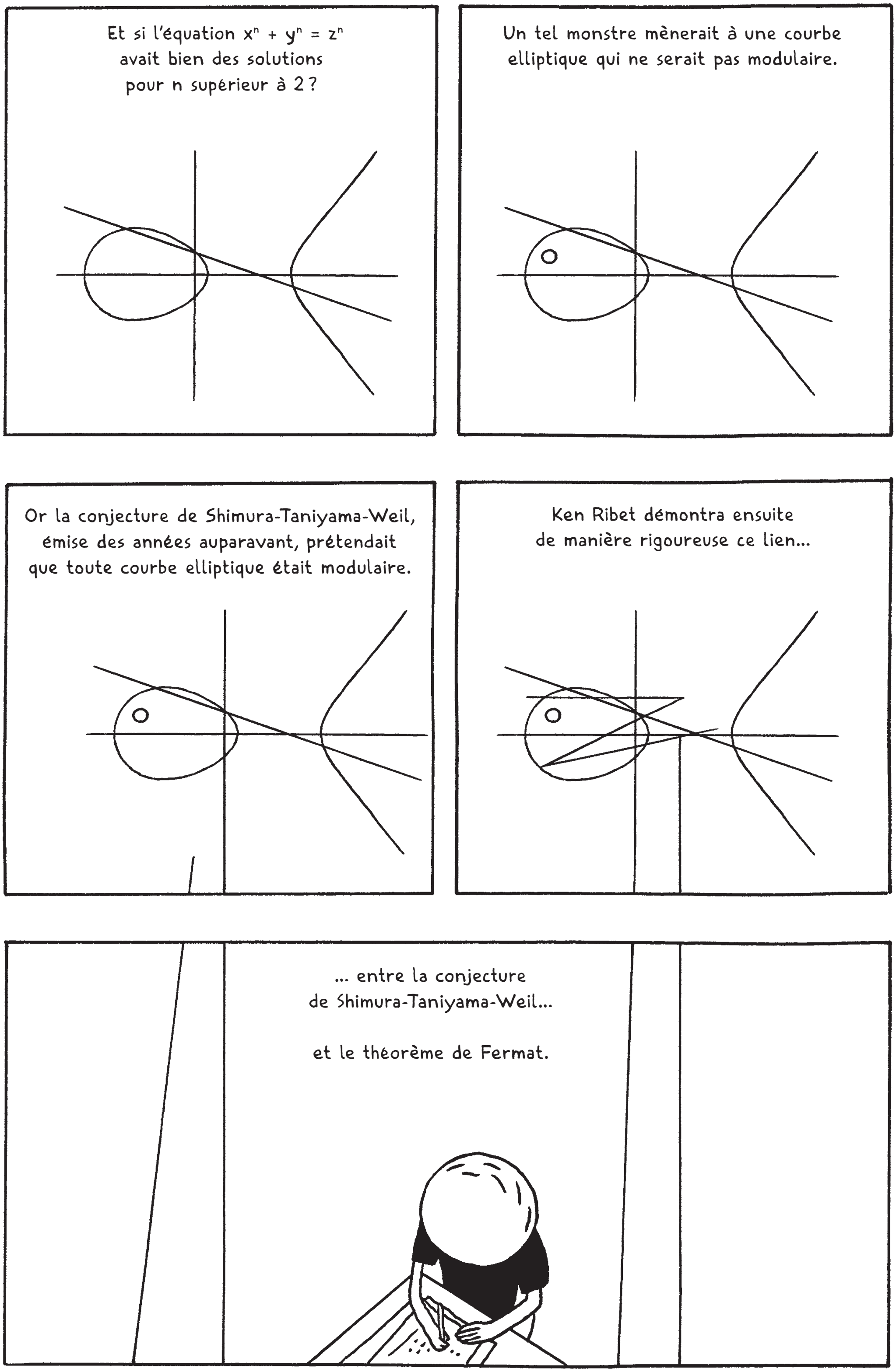


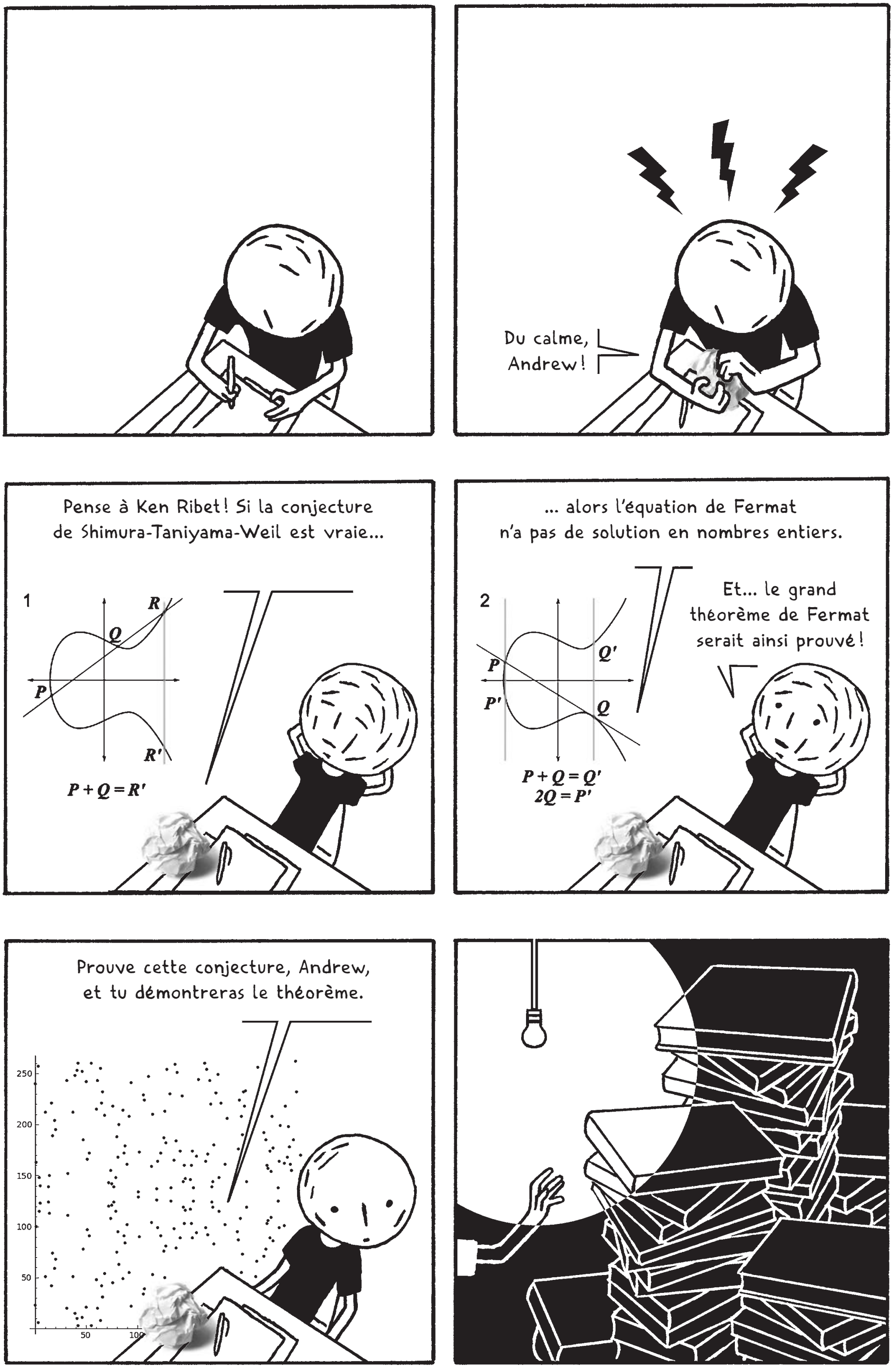
Et voici Andrew Wiles!
À 10 ans, il aimait résoudre les problèmes dans les livres d'énigmes.
$x^n + y^n = z^n$
n'a pas de solution
n supérieur à 2
x, y, z entiers)
Les réponses se trouvaient à la fin. Sauf pour l'énigme de Fermat.
Ce fameux Fermat disait avoir une solution très simple...
... mais depuis, personne n'avait pu la retrouver. Comment était-ce possible ?
Une conjecture si simple restée invérifiée!
Andrew Wiles releva le défi...
... cette fois-ci avec des outils mathématiques modernes.

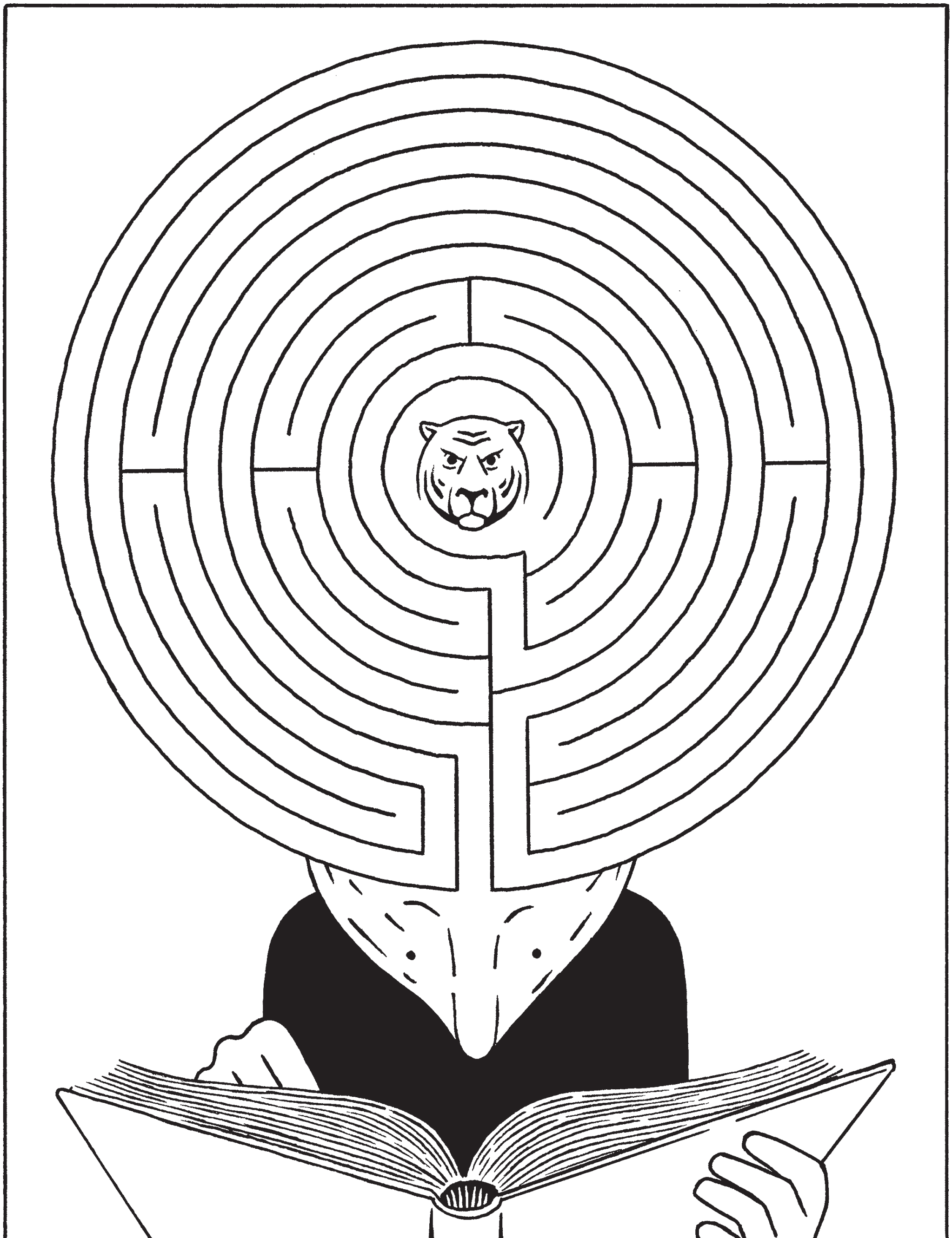

Depuis ce jour, la conjecture hanta
ses nuits blanches et fiévreuses.


Il avait le sentiment
d'être enfermé dans son obsession
comme dans une prison
sans porte ni fenêtre.

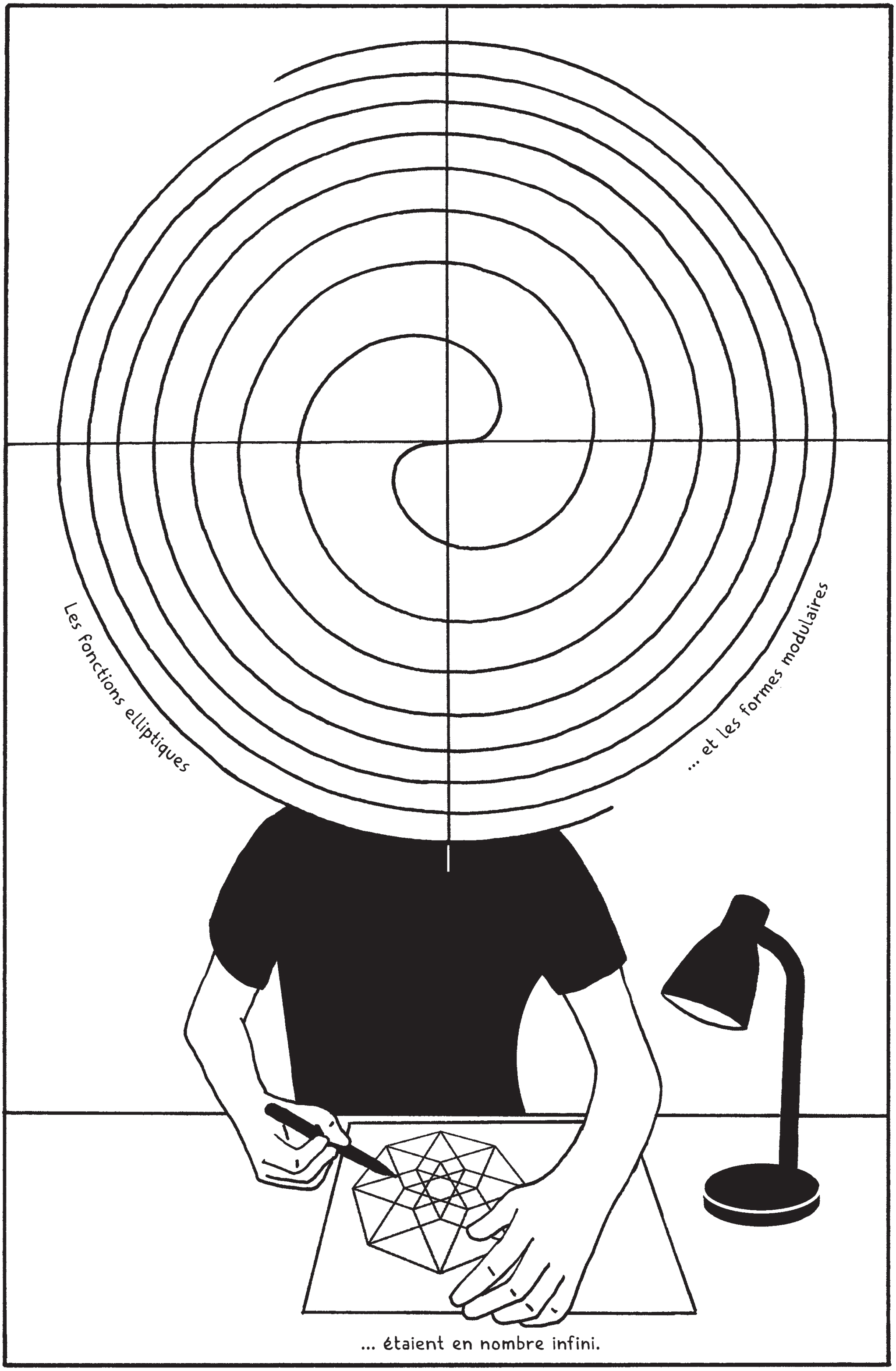

Mais Wiles orienta finalement ses recherches sur les courbes elliptiques,
ces courbes algébriques pleines de propriétés, comme l'addition géométrique de leurs points.
Les courbes elliptiques permettaient d'introduire de nombreux cas particuliers
dans un grand faisceau de conjectures.
Ainsi, on pouvait associer une courbe elliptique à l'équation de Fermat
tout en imaginant que Fermat se soit trompé.


Et si l'équation $x^n + y^n = z^n$ avait bien des solutions pour n supérieur à 2 ?
Un tel monstre mènerait à une courbe elliptique qui ne serait pas modulaire.
Or la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, émise des années auparavant, prétendait que toute courbe elliptique était modulaire.
Ken Ribet démontra ensuite de manière rigoureuse ce lien...
... entre la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil...
et le théorème de Fermat.

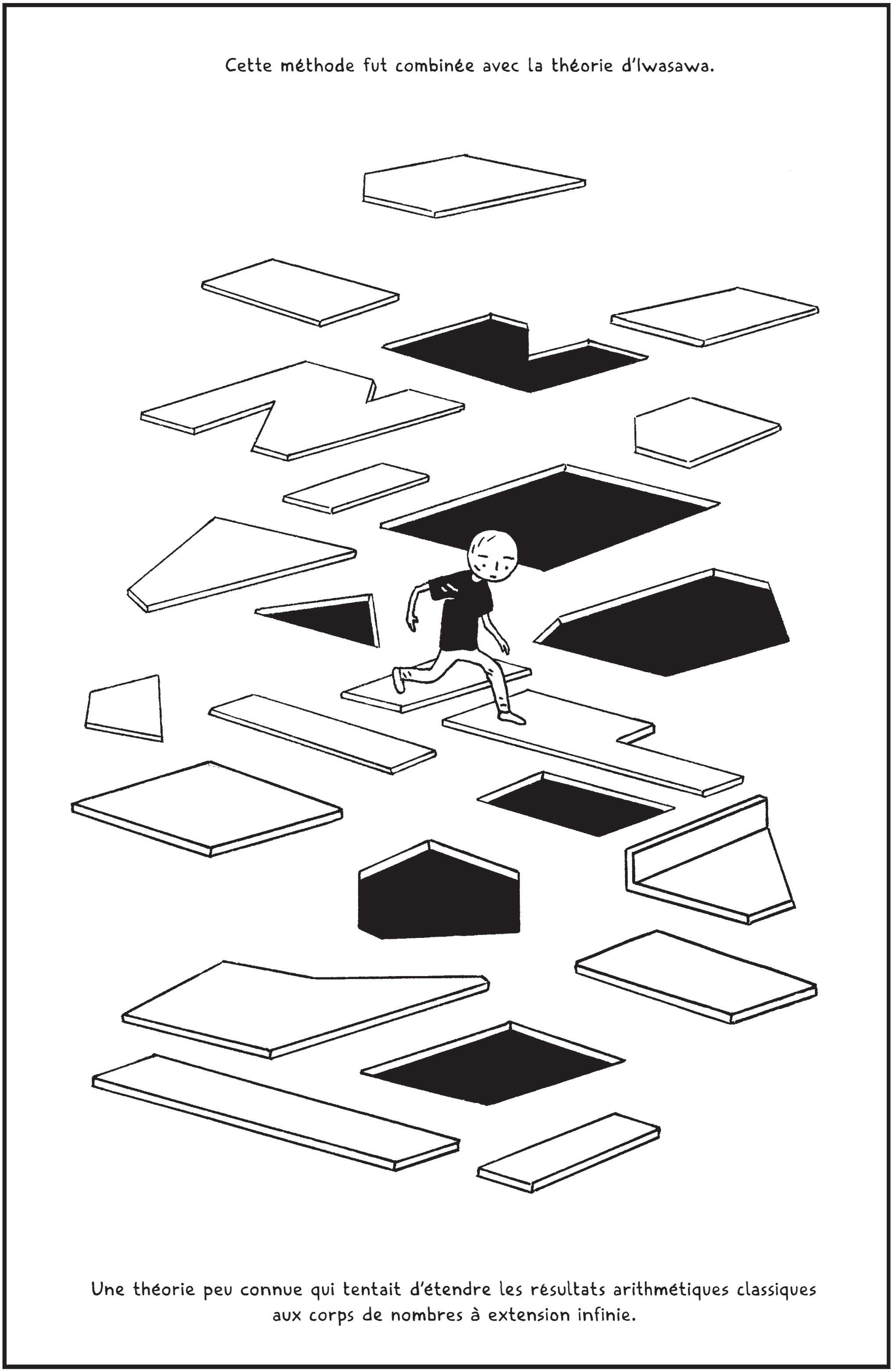

Du calme, Andrew !
Pense à Ken Ribet ! Si la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil est vraie...
1
R
Q
P
R'
P + Q = R'
... alors l'équation de Fermat n'a pas de solution en nombres entiers.
2
Q'
P
P'
Q
P + Q = Q'
2Q = P'
Et... le grand théorème de Fermat serait ainsi prouvé !
Prouve cette conjecture, Andrew, et tu démontreras le théorème.
250
200
150
100
50
50

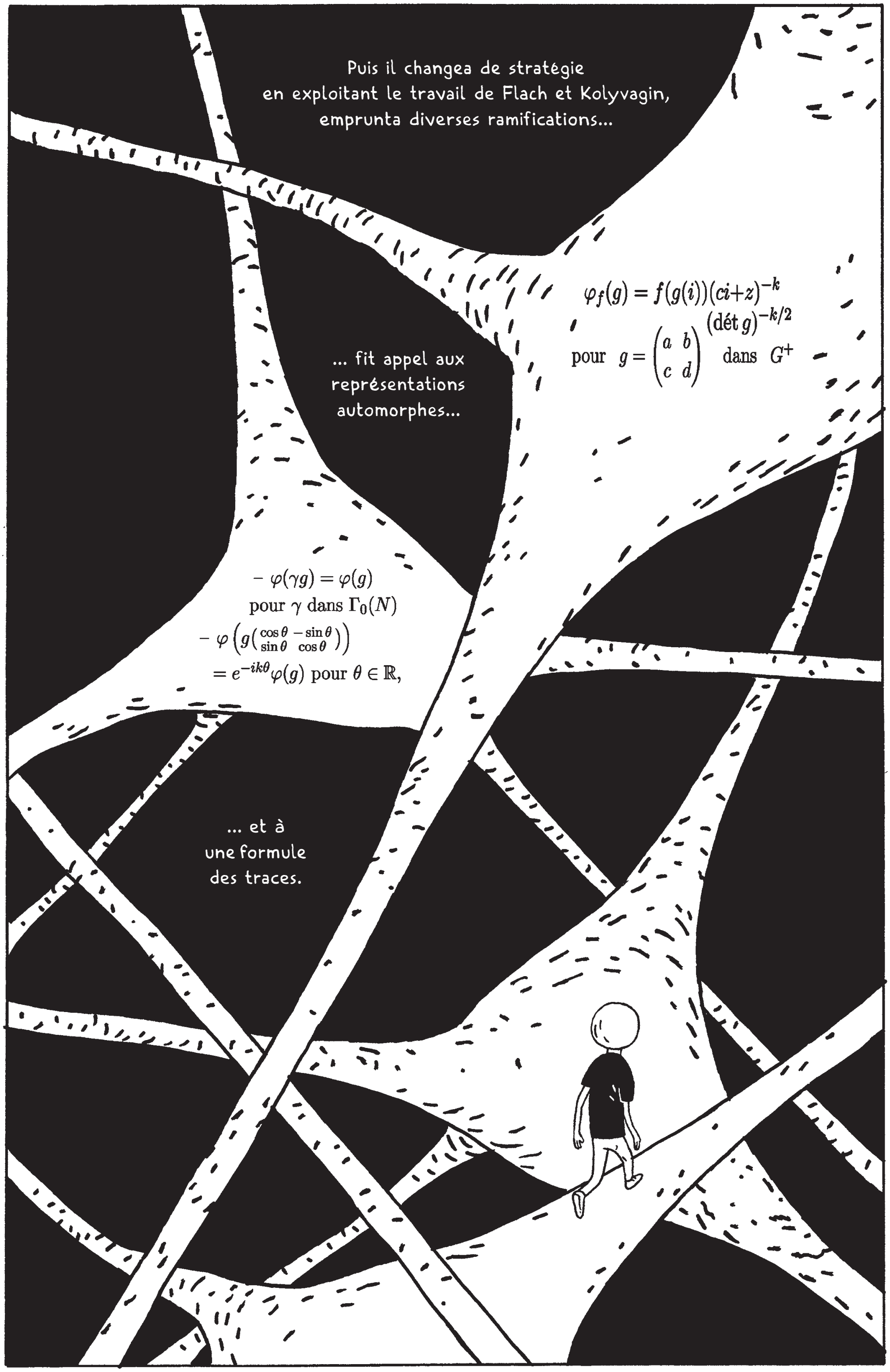


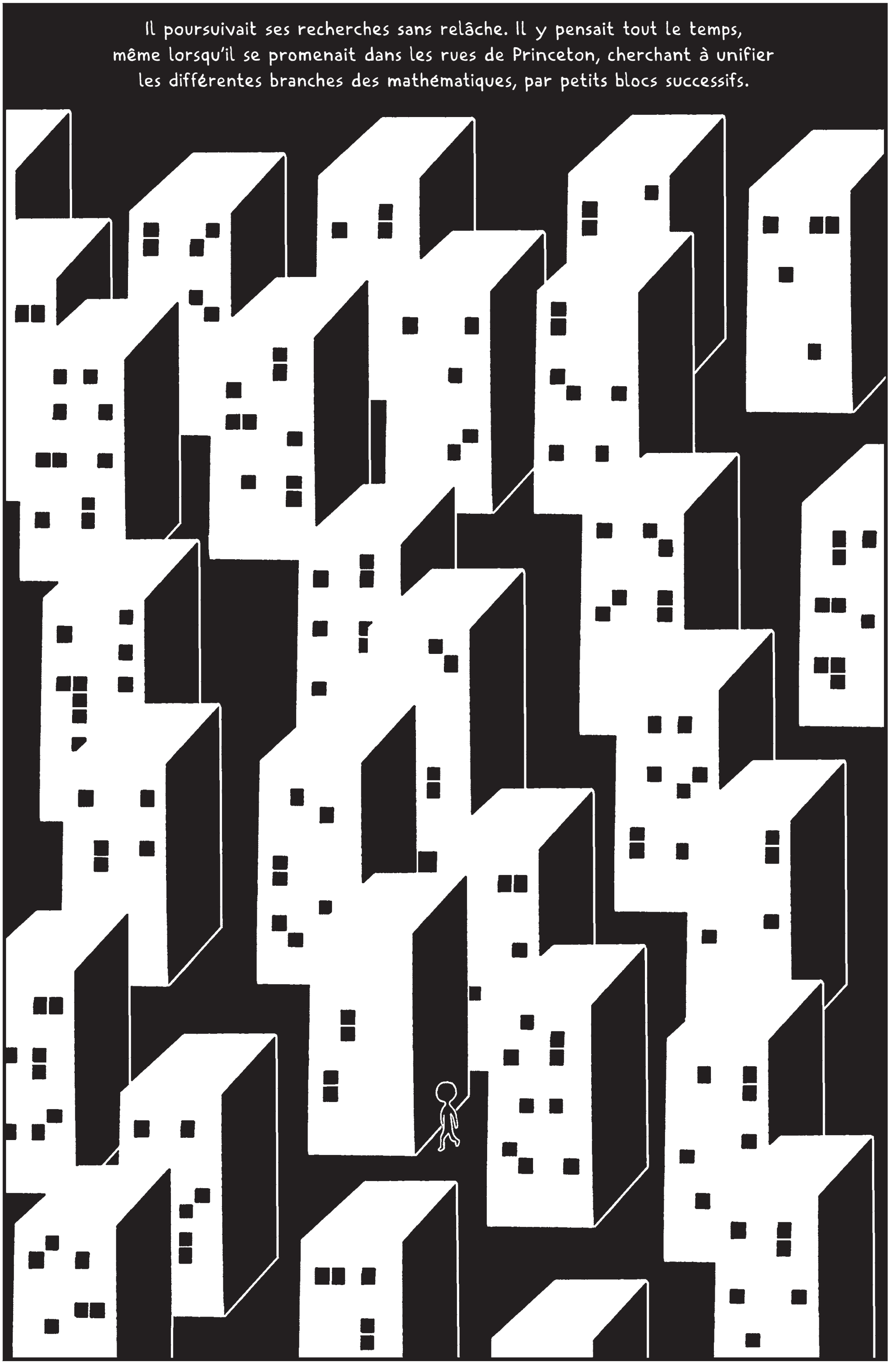
Aussitôt, Wiles essaya de bâtir des stratégies
en travaillant dans l'isolement et le secret.

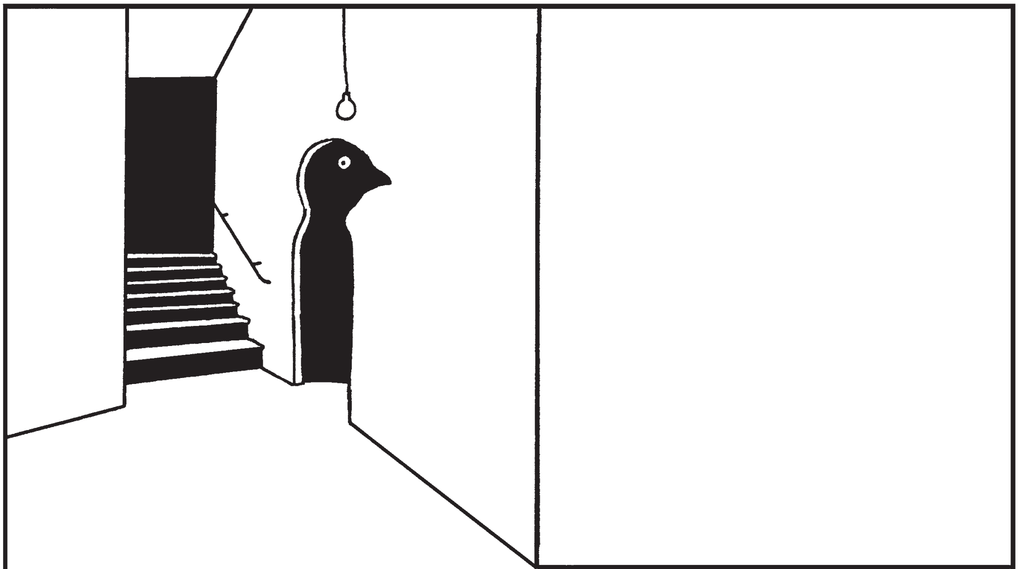

Les fonctions elliptiques
... et les formes modulaires
... étaient en nombre infini.


Pour faciliter le calcul, Andrew eut l'idée de transformer les courbes elliptiques
en représentations de Galois, passant de la géométrie à l'algèbre.


Cette méthode fut combinée avec la théorie d'Iwasawa.
Une théorie peu connue qui tentait d'étendre les résultats arithmétiques classiques aux corps de nombres à extension infinie.


Puis il changea de stratégie en exploitant le travail de Flach et Kolyvagin, emprunta diverses ramifications...
$\varphi_f(g) = f(g(i))(ci+z)^{-k} (\text{dét}\, g)^{-k/2}$ pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans G^+
... fit appel aux représentations automorphes...
$- \varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ pour γ dans $\Gamma_0(N)$
$- \varphi\left(g\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)\right) = e^{-ik\theta}\varphi(g)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$,
... et à une formule des traces.


Il poursuivait ses recherches sans relâche. Il y pensait tout le temps, même lorsqu'il se promenait dans les rues de Princeton, cherchant à unifier les différentes branches des mathématiques, par petits blocs successifs.

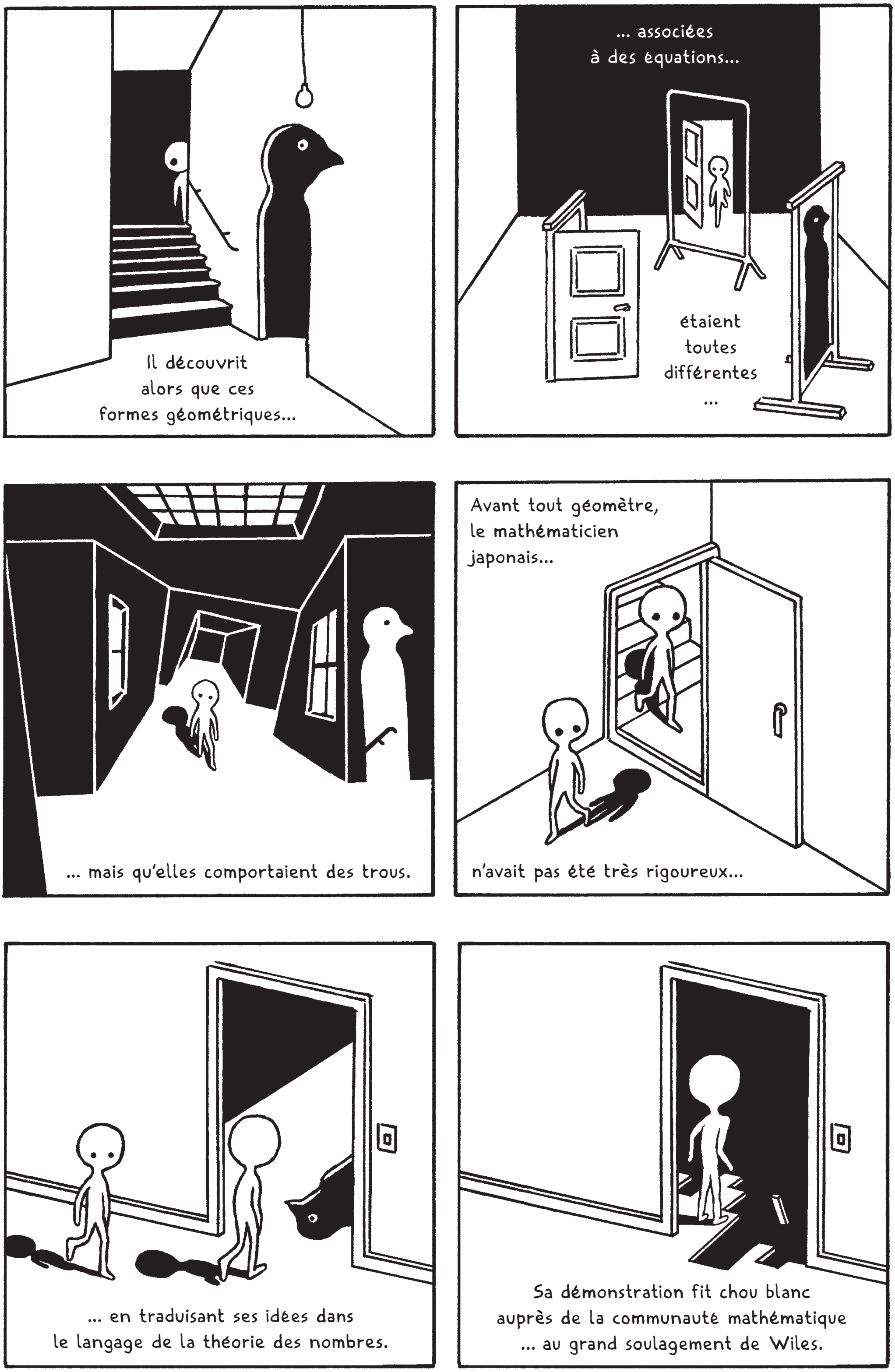


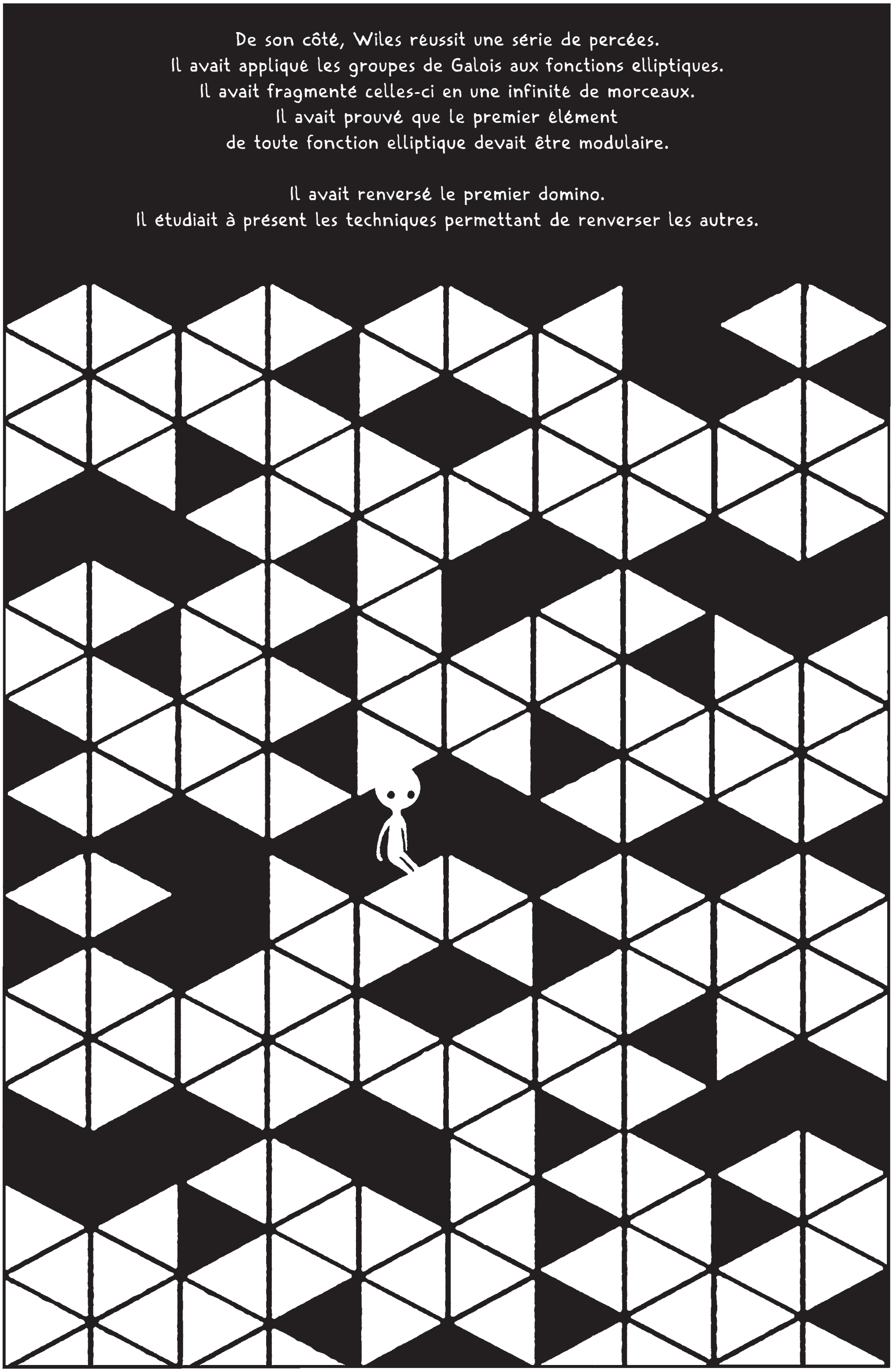
Un jour,
il apprit qu'un membre
de l'université de Tokyo
était sur le point
de découvrir la solution.

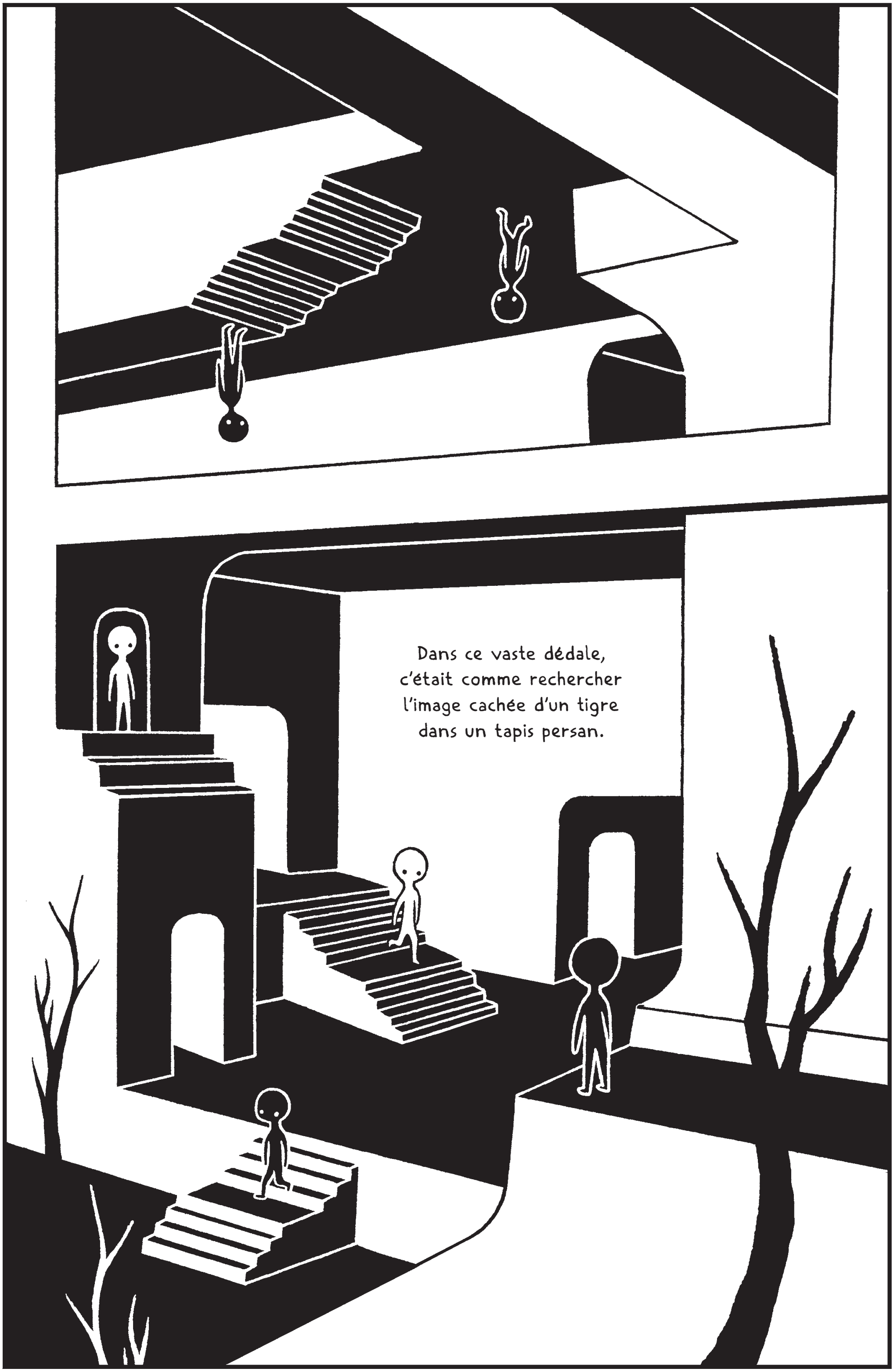
Il avait abordé le problème
par la géométrie différentielle.

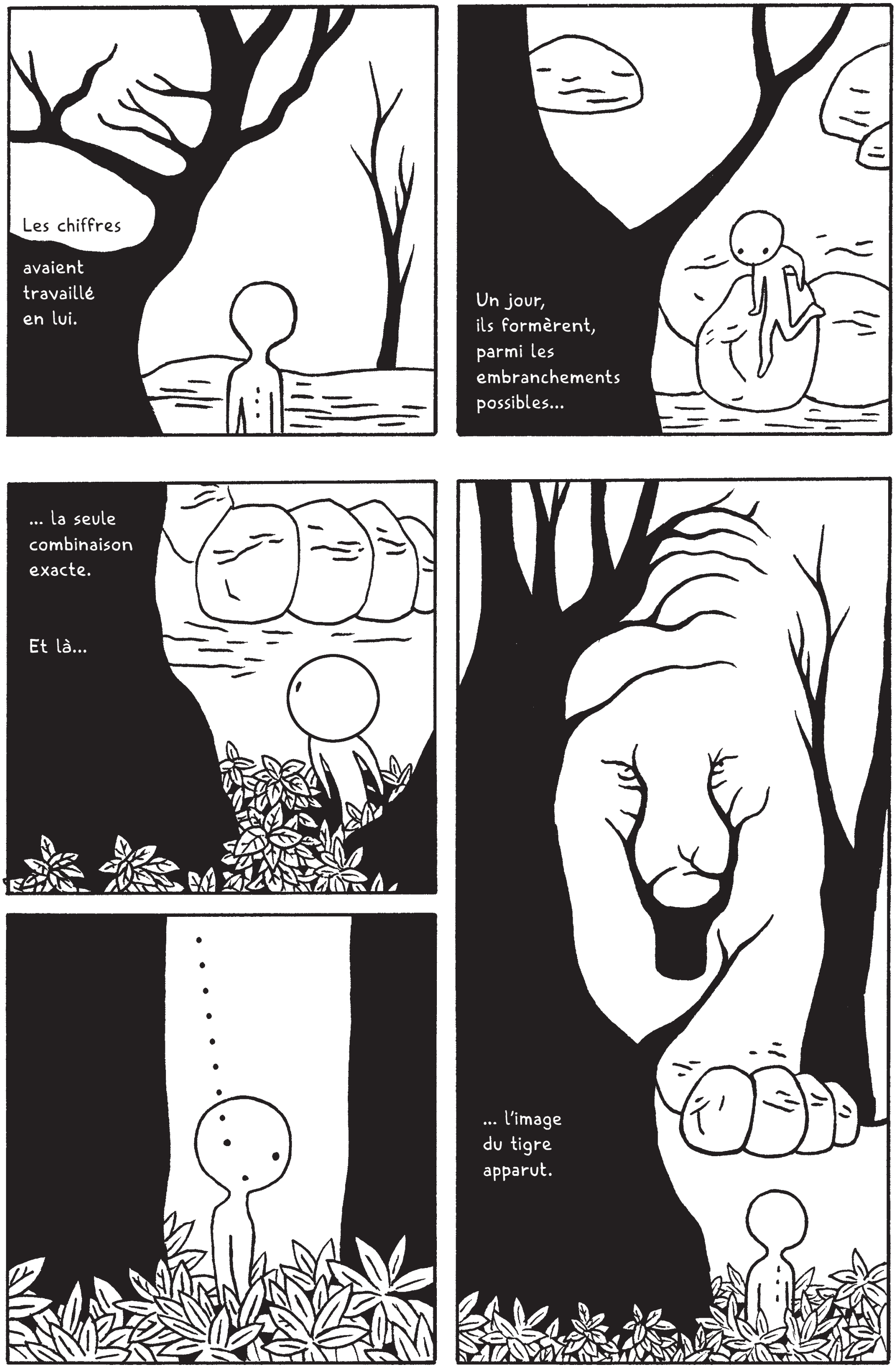
C'était comme des ouvertures secrètes.

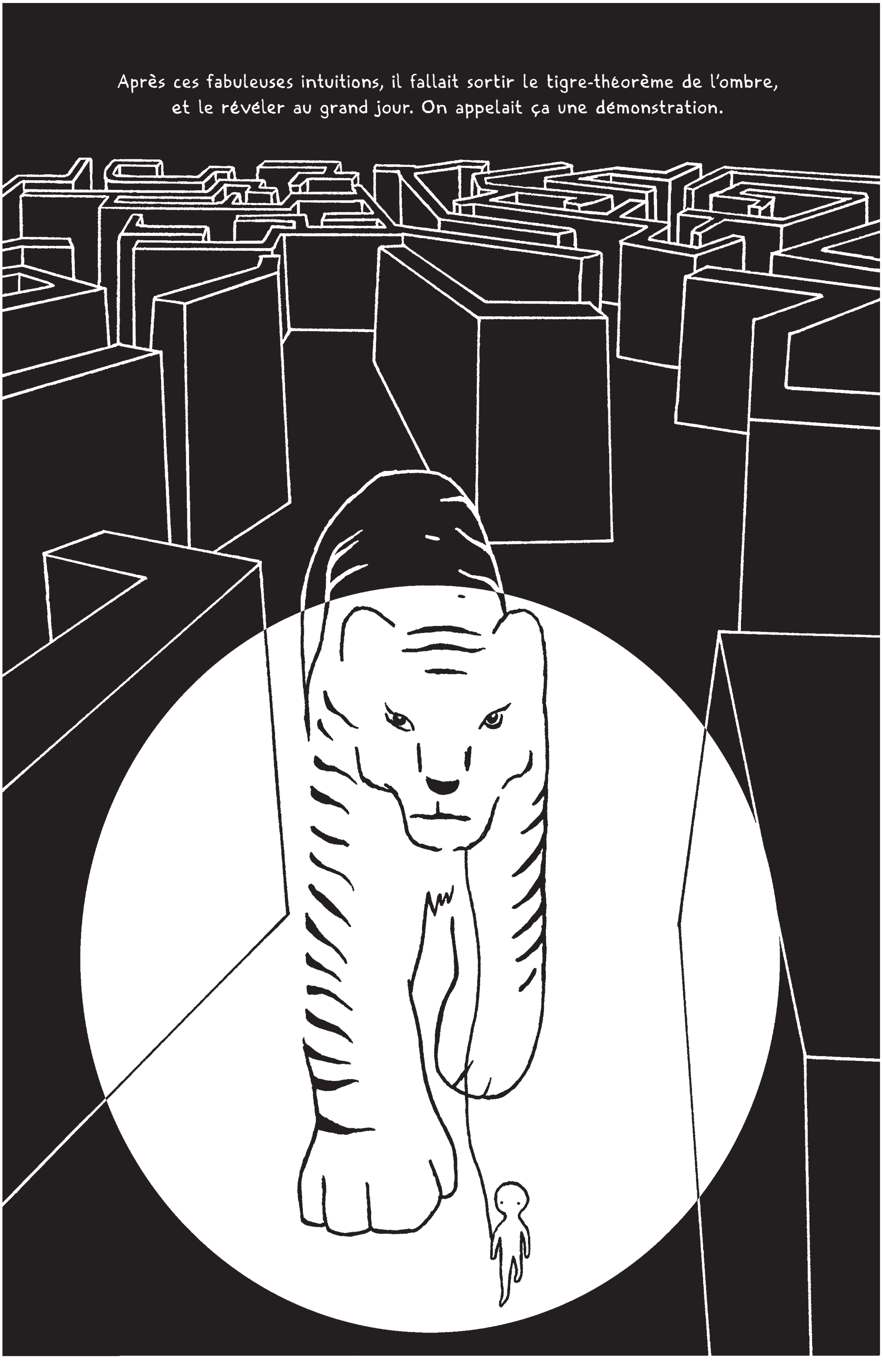
Frémissant d'effroi,
le cœur battant,
Wiles enquêta
pour en savoir davantage.


Il découvrit alors que ces formes géométriques...
... associées à des équations...
étaient toutes différentes ...
... mais qu'elles comportaient des trous.
Avant tout géomètre, le mathématicien japonais...
n'avait pas été très rigoureux...
... en traduisant ses idées dans le langage de la théorie des nombres.
Sa démonstration fit chou blanc auprès de la communauté mathématique ... au grand soulagement de Wiles.

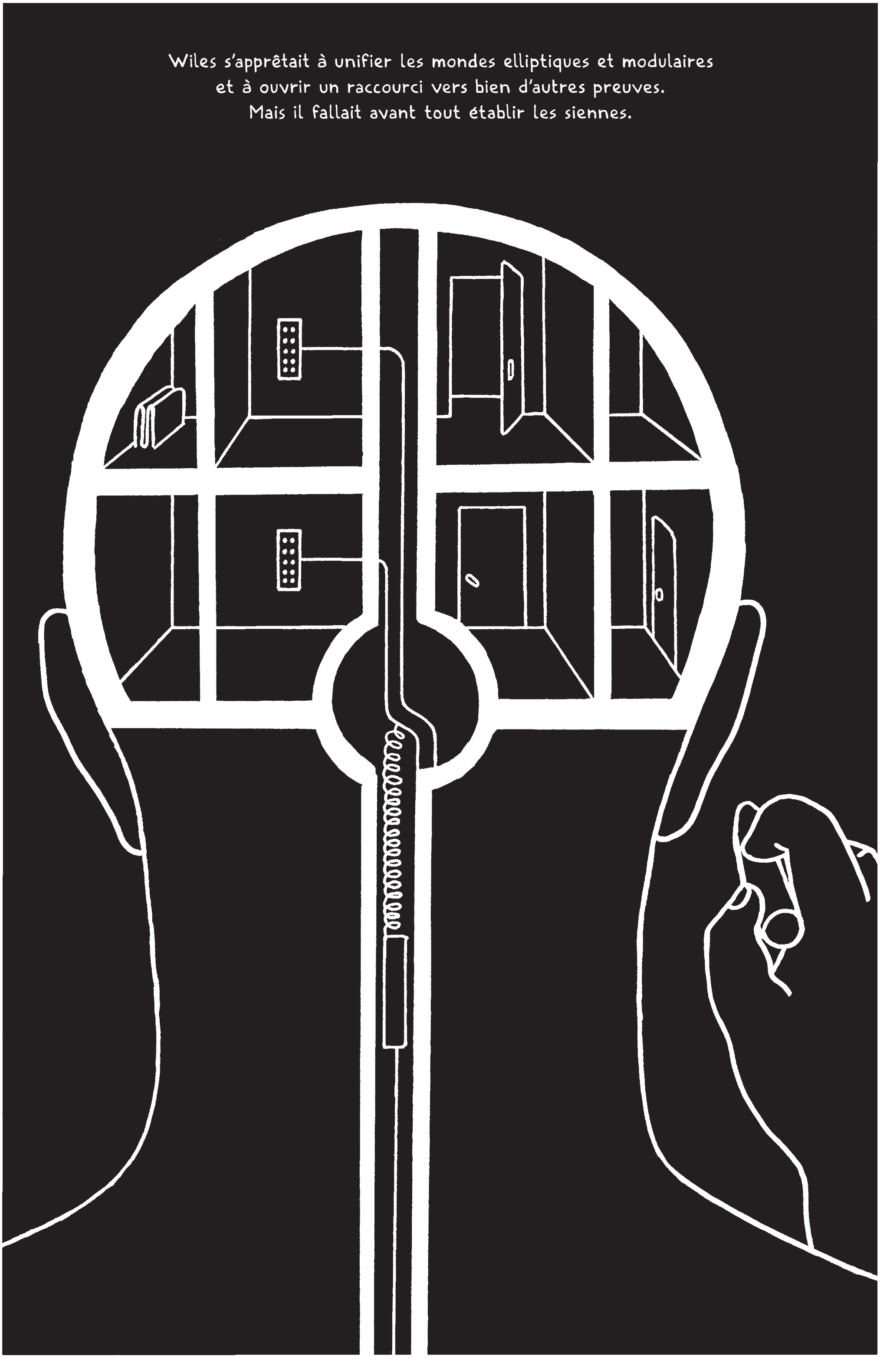

De son côté, Wiles réussit une série de percées.
Il avait appliqué les groupes de Galois aux fonctions elliptiques.
Il avait fragmenté celles-ci en une infinité de morceaux.
Il avait prouvé que le premier élément
de toute fonction elliptique devait être modulaire.
Il avait renversé le premier domino.
Il étudiait à présent les techniques permettant de renverser les autres.

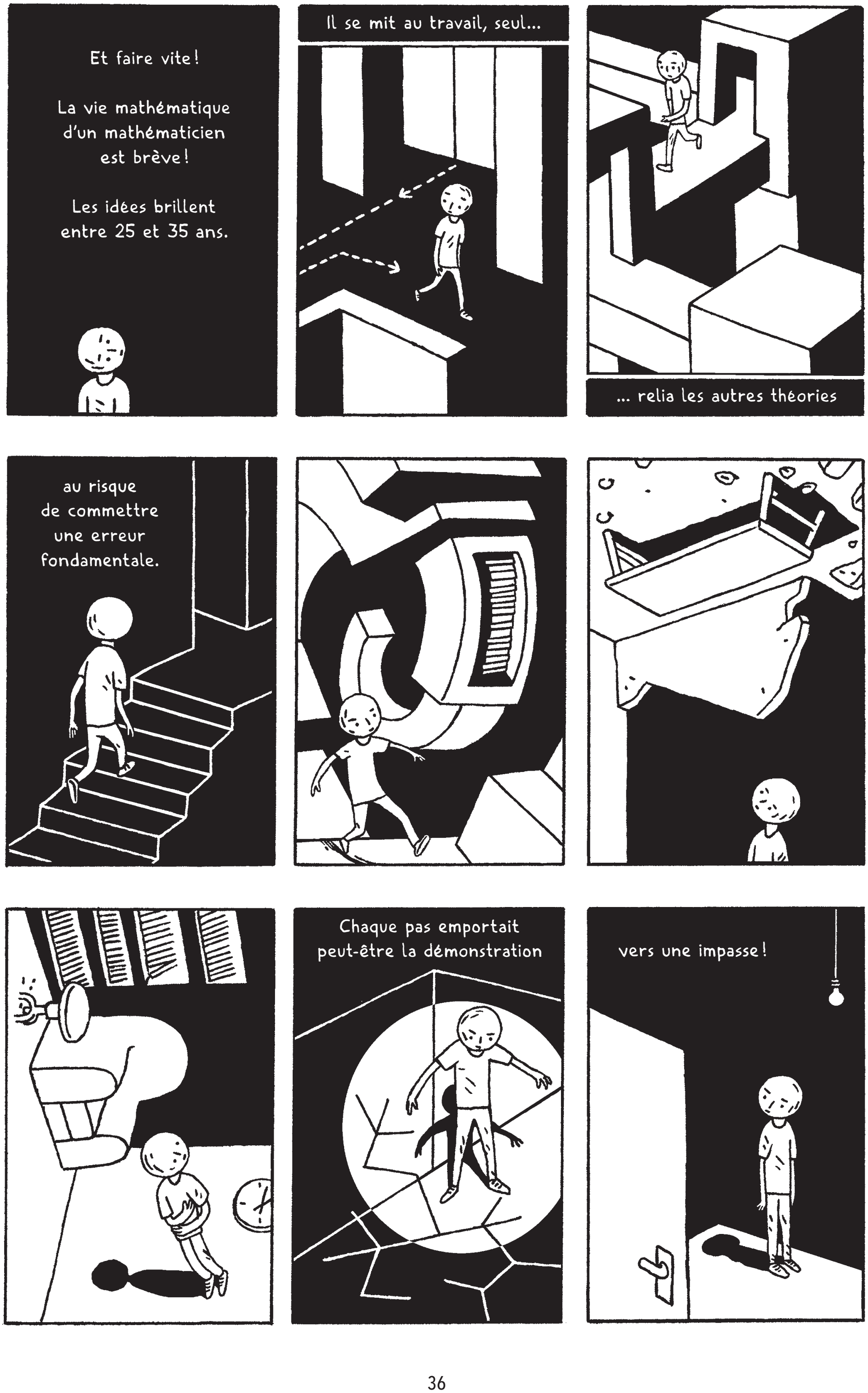

Dans ce vaste dédale,
c'était comme rechercher
l'image cachée d'un tigre
dans un tapis persan.


Les chiffres
avaient travaillé en lui.
Un jour, ils formèrent, parmi les embranchements possibles...
... la seule combinaison exacte.
Et là...
... l'image du tigre apparut.

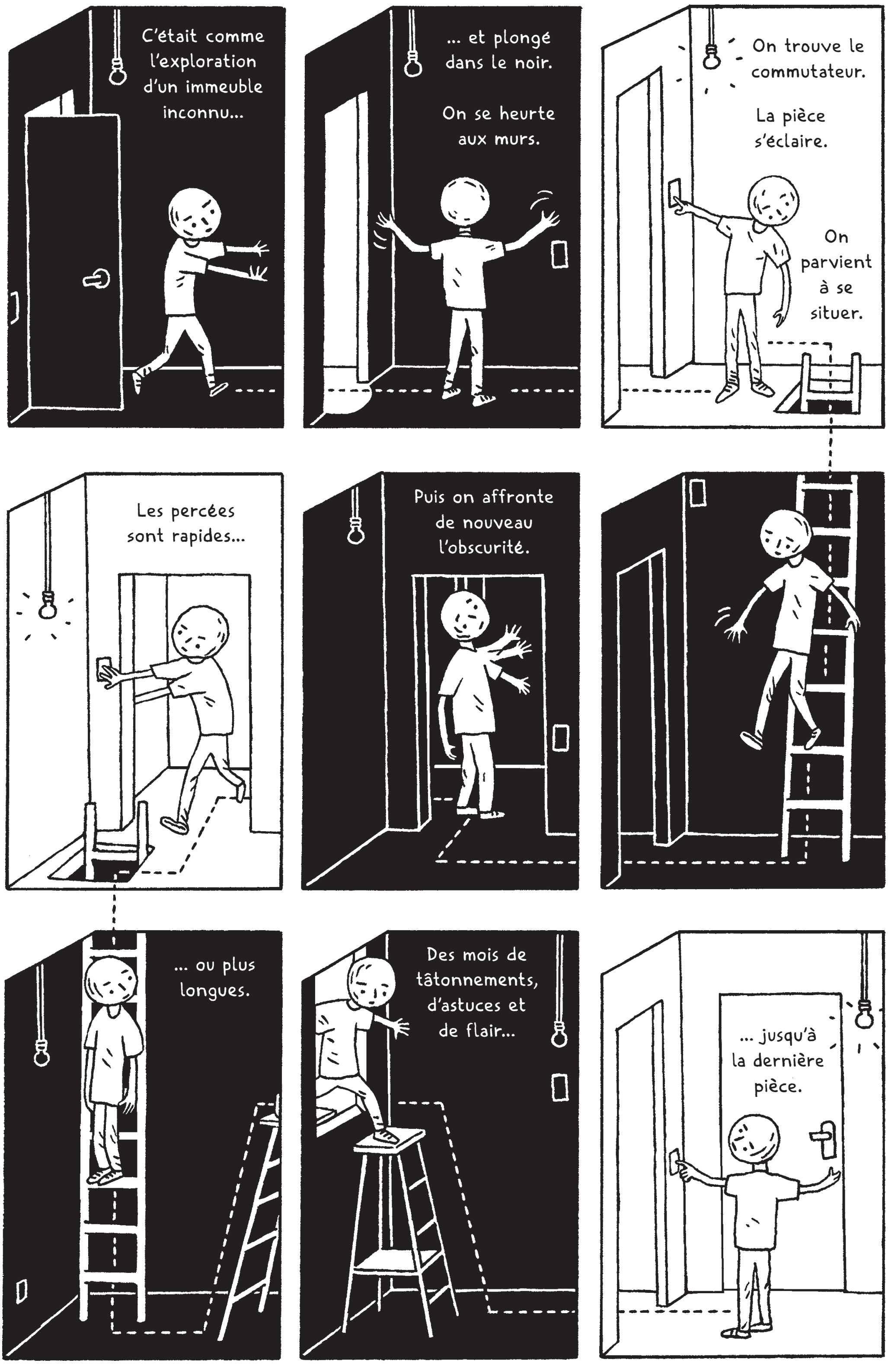

Après ces fabuleuses intuitions, il fallait sortir le tigre-théorème de l'ombre,
et le révéler au grand jour. On appelait ça une démonstration.

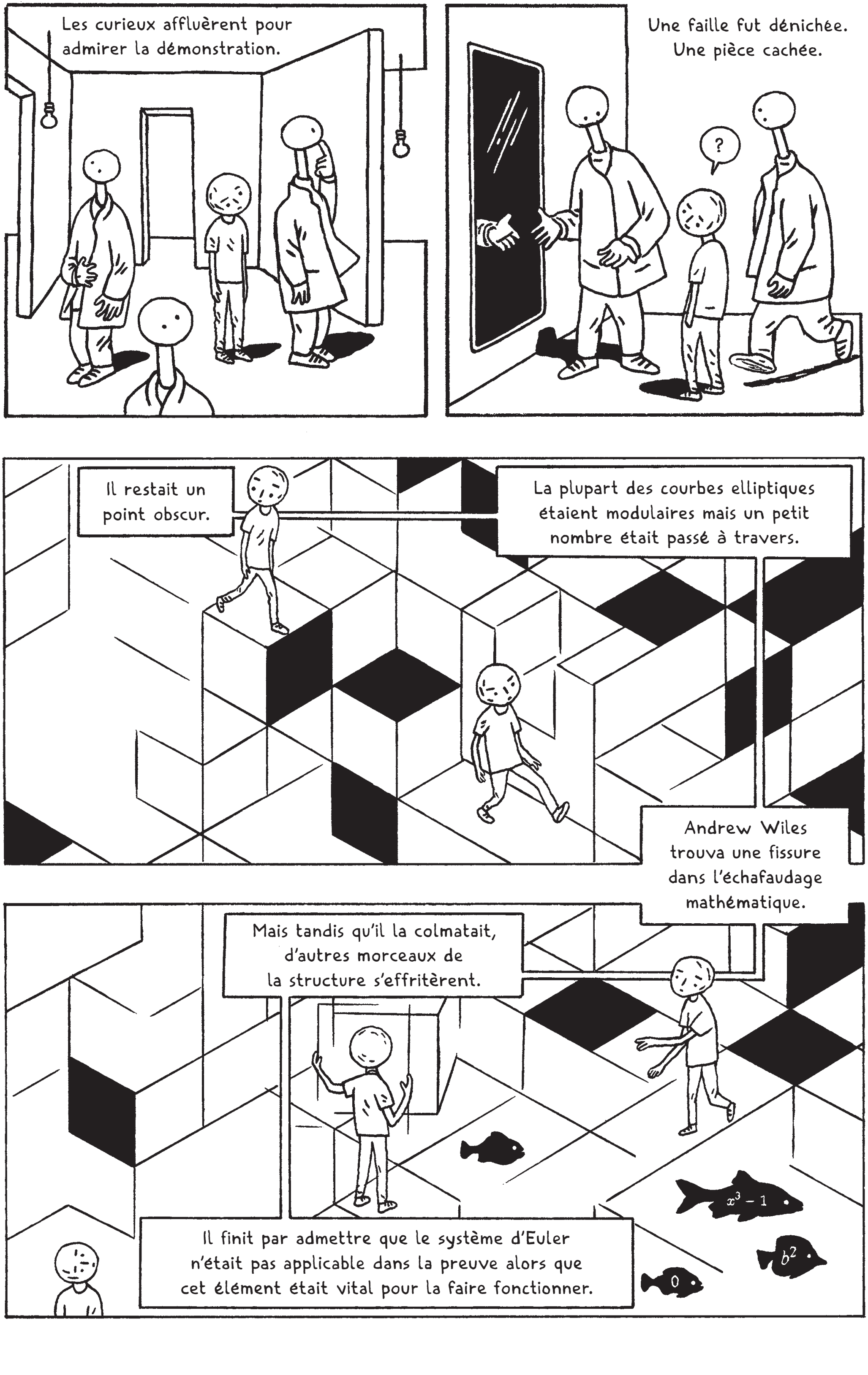

La démonstration consistait en un raisonnement gigantesque ...
... bâti de manière dense à partir de centaines de calculs assemblés par des milliers de liens logiques.
Une seule incohérence... et l'ensemble de la démonstration se trouvait infirmé.


Wiles s'apprêtait à unifier les mondes elliptiques et modulaires
et à ouvrir un raccourci vers bien d'autres preuves.
Mais il fallait avant tout établir les siennes.



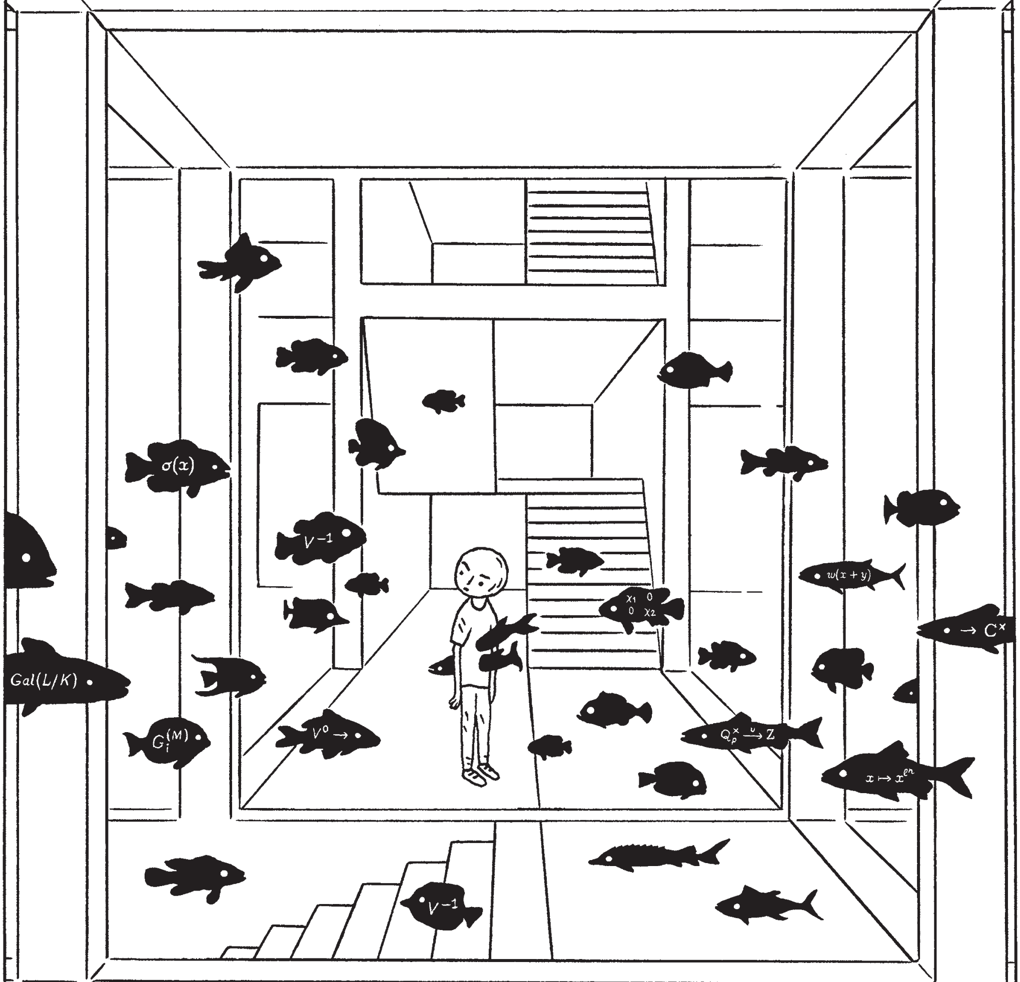
Et faire vite !
La vie mathématique d'un mathématicien est brève !
Les idées brillent entre 25 et 35 ans.
Il se mit au travail, seul...
... relia les autres théories
au risque de commettre une erreur fondamentale.
Chaque pas emportait peut-être la démonstration
vers une impasse !


C'était comme l'exploration d'un immeuble inconnu…
… et plongé dans le noir.
On se heurte aux murs.
On trouve le commutateur.
La pièce s'éclaire.
On parvient à se situer.
Les percées sont rapides…
Puis on affronte de nouveau l'obscurité.
… ou plus longues.
Des mois de tâtonnements, d'astuces et de flair…
… jusqu'à la dernière pièce.


Les curieux affluèrent pour admirer la démonstration.
Une faille fut dénichée. Une pièce cachée.
?
Il restait un point obscur.
La plupart des courbes elliptiques étaient modulaires mais un petit nombre était passé à travers.
Andrew Wiles trouva une fissure dans l'échafaudage mathématique.
Mais tandis qu'il la colmatait, d'autres morceaux de la structure s'effritèrent.
$x^3 - 1$
b^2
0
Il finit par admettre que le système d'Euler n'était pas applicable dans la preuve alors que cet élément était vital pour la faire fonctionner.

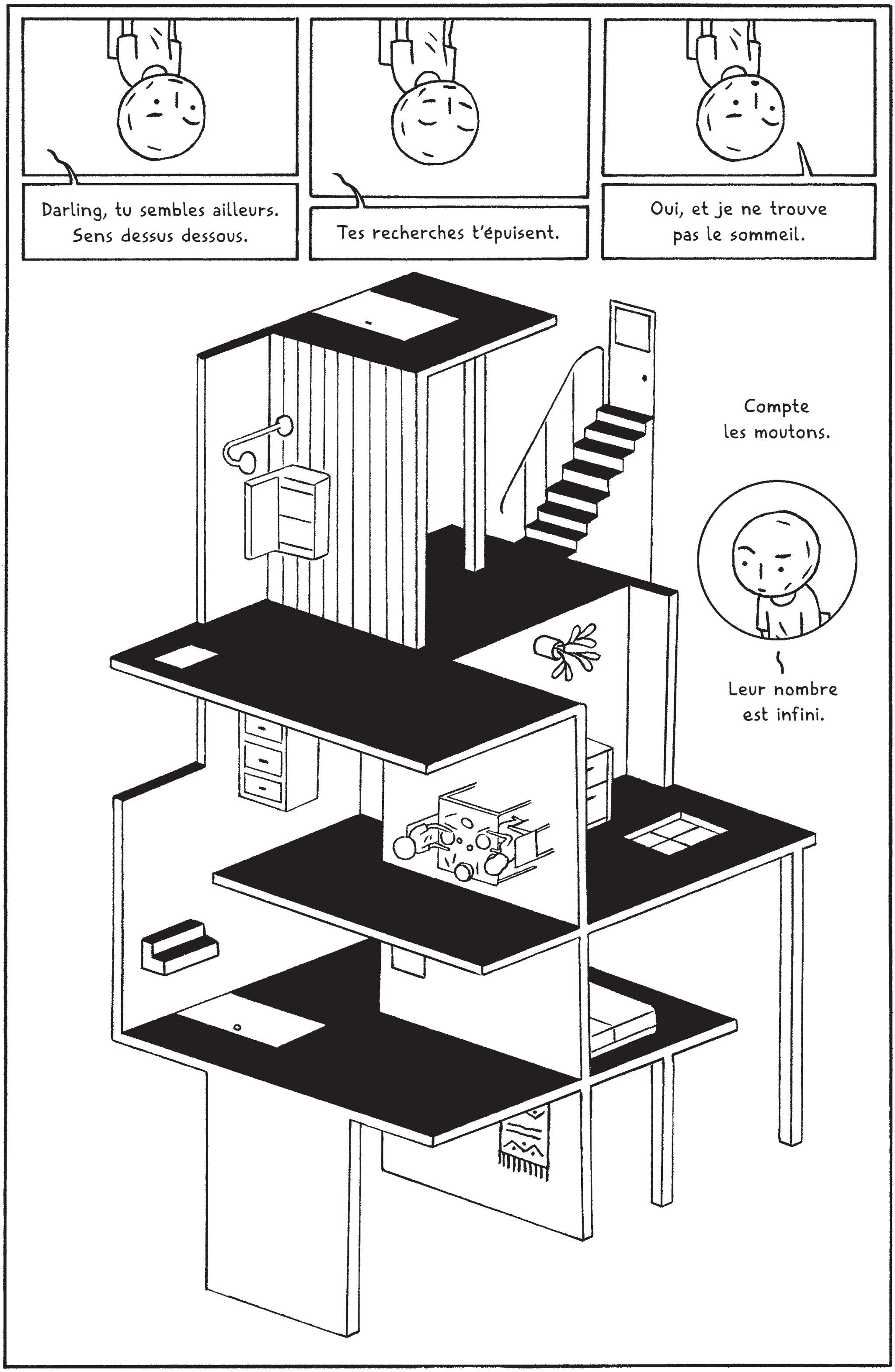
Wiles réalisa que son erreur de calcul n'était pas mineure.

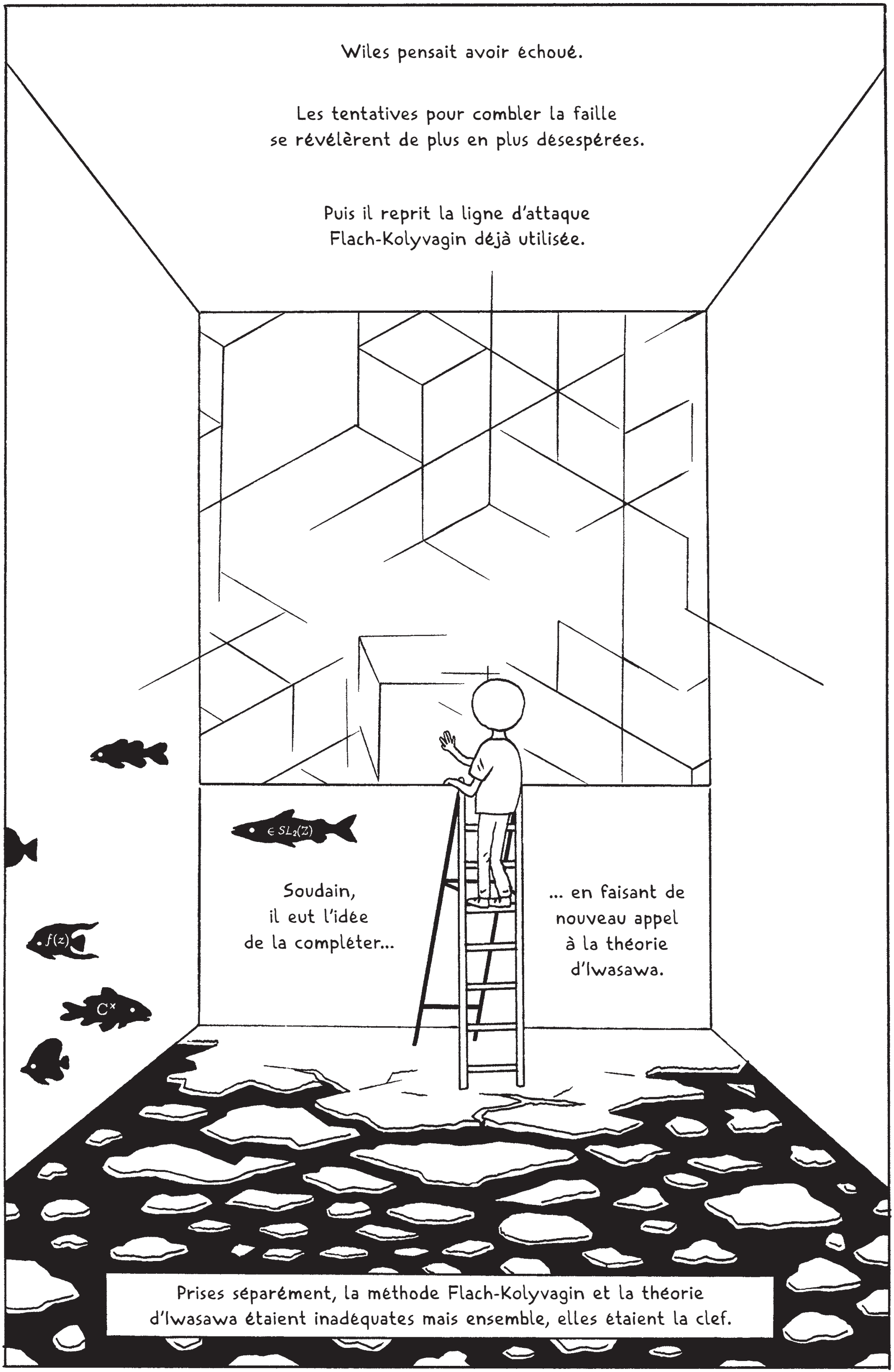
Cette fois, il s'agissait d'un vide laissé par un point d'ancrage défectueux qu'il devrait remplacer par des matériaux encore inexistants.

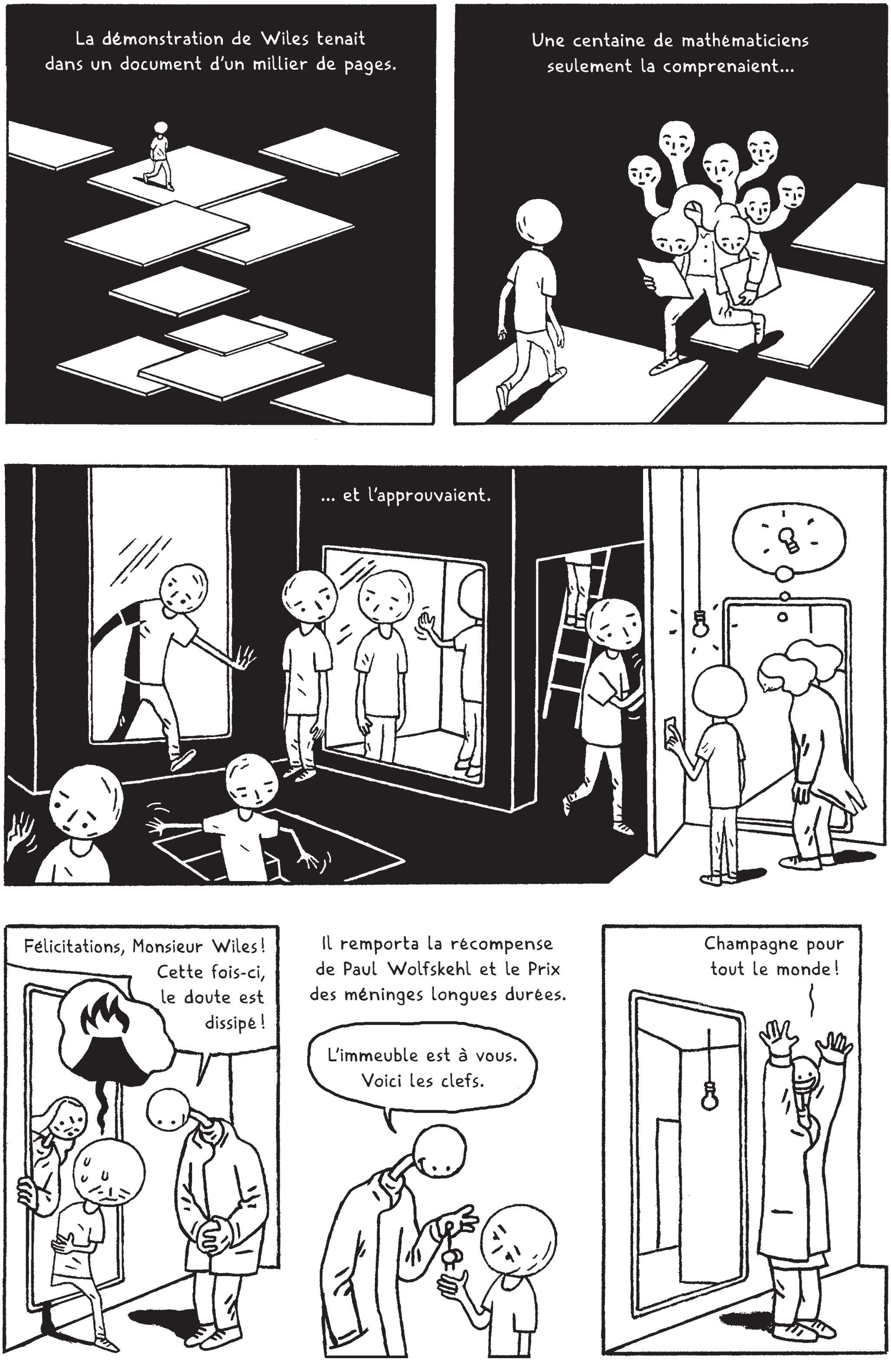


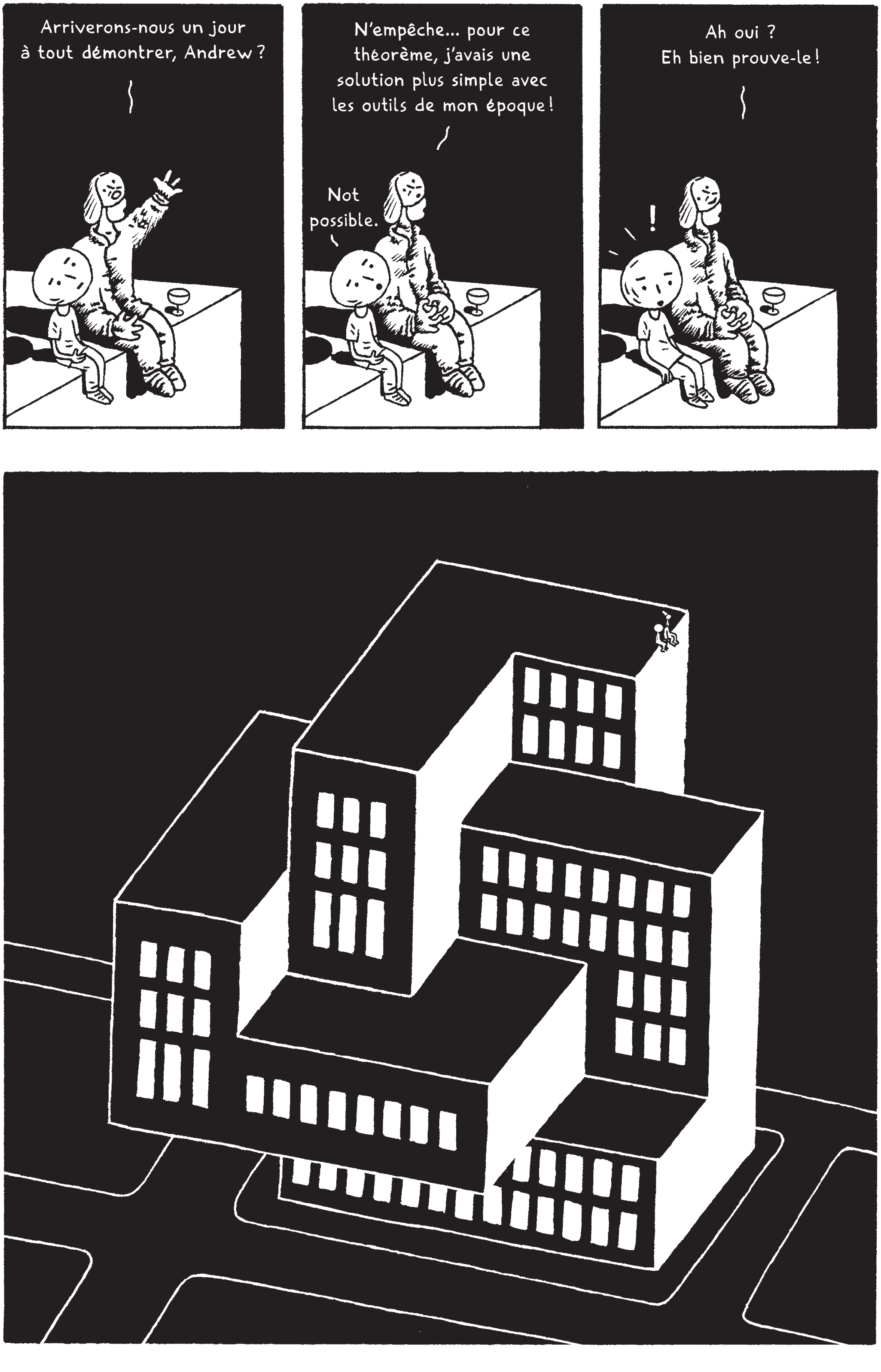
Et si c'était un gouffre ?

Une erreur irréparable
et humiliante qui ferait tout céder ?


Darling, tu sembles ailleurs.
Sens dessus dessous.
Tes recherches t'épuisent.
Oui, et je ne trouve
pas le sommeil.
Compte
les moutons.
Leur nombre
est infini.


Wiles pensait avoir échoué.
Les tentatives pour combler la faille se révélèrent de plus en plus désespérées.
Puis il reprit la ligne d'attaque Flach-Kolyvagin déjà utilisée.
$\in SL_2(\mathbb{Z})$
Soudain, il eut l'idée de la compléter...
... en faisant de nouveau appel à la théorie d'Iwasawa.
$f(z)$
$C^{\times}$
Prises séparément, la méthode Flach-Kolyvagin et la théorie d'Iwasawa étaient inadéquates mais ensemble, elles étaient la clef.


La démonstration de Wiles tenait dans un document d'un millier de pages.
Une centaine de mathématiciens seulement la comprenaient...
... et l'approuvaient.
Félicitations, Monsieur Wiles ! Cette fois-ci, le doute est dissipé !
Il remporta la récompense de Paul Wolfskehl et le Prix des méninges longues durées.
L'immeuble est à vous. Voici les clefs.
Champagne pour tout le monde !


Arriverons-nous un jour à tout démontrer, Andrew ?
N'empêche... pour ce théorème, j'avais une solution plus simple avec les outils de mon époque !
Not possible.
Ah oui ?
Eh bien prouve-le !
!

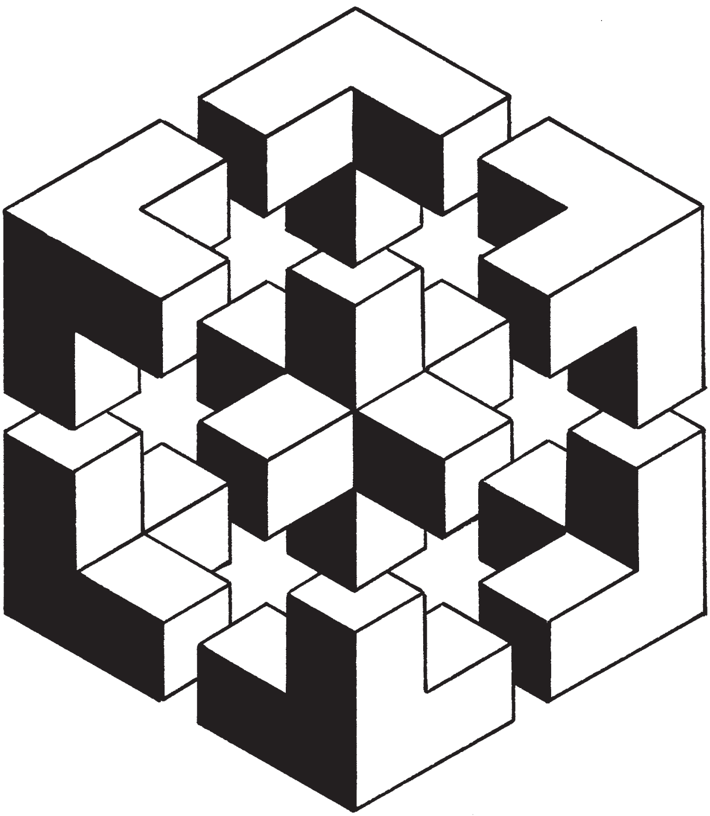
ÉPILOGUE

« J'ai eu le rare privilège de poursuivre, adulte,
ce qui fut le rêve de mon enfance.
C'est rare, mais si vous pouvez vous attacher, adulte,
à quelque chose qui a pour vous autant d'importance,
cela offre bien plus de satisfaction que tout ce qu'on peut imaginer.

J'ai été si obsédé par ce problème que, pendant huit ans,
j'y ai pensé tout le temps, du matin jusqu'au soir.
Ça fait beaucoup de temps dévolu à un seul objet.
Et avoir résolu ce problème m'apporte une sensation de vide,
mais surtout une formidable impression de fierté.

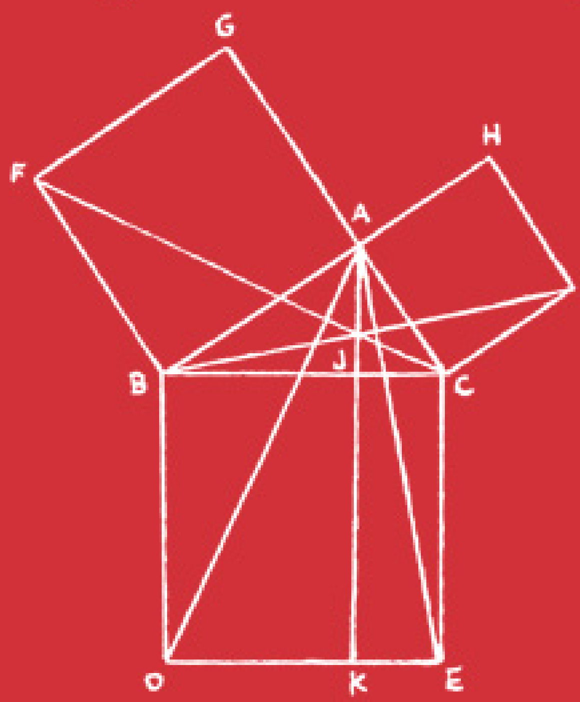
Cette odyssée-là est terminée. Mon esprit est au repos. »

Andrew Wiles



$$\frac{z+y}{2} = a^2 \qquad \frac{x+iy}{z} = \frac{a+ib}{a-ib} = \frac{(a^2-b^2)+i\,2ab}{a^2+b^2}$$

$$x^2 = 2ab, \quad y^2 = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2$$



$$\mathbb{Z}[\zeta] = \{a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_{l-2}\zeta^{l-2} : a_i \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "\phi_i"'] \arrow[dr, "\phi_j"] & \\ G_i \arrow[rr, "\pi_{ij}"'] & & G_j \end{tikzcd}$$

$$\Delta = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n.$$

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691}$$

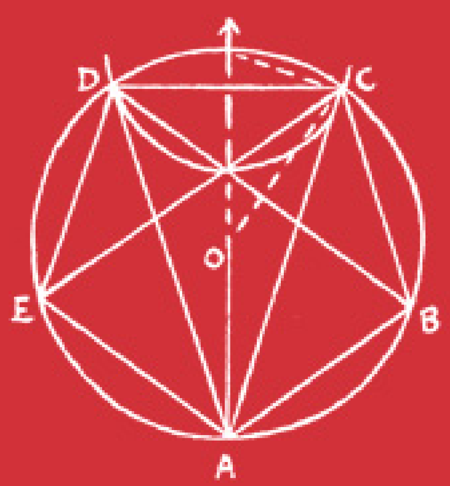
$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & & J \arrow[dl, "\psi_i"] \\ & G_i & \end{tikzcd}$$

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6.$$

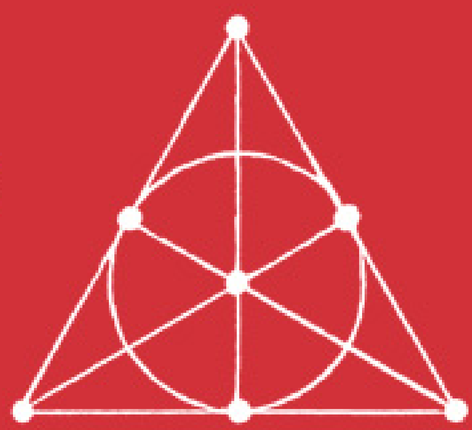
$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_i|_X"'] \arrow[dr, "\pi_j|_X"] & \\ G_i \arrow[rr, "\pi_{ij}"'] & & G_j \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & & X \arrow[dl, "\pi_i"] \\ & G_i & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Gal(\bar{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p) \arrow[r] \arrow[dr] & Gal(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/n \arrow[d, "\pi_{nm}"] \\ & Gal(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/m \end{tikzcd}$$

$$\varprojlim G_i = \bigcap_{i \geq j}\{c \in \prod G_i : \pi_{ij}(\pi_i(c)) = \pi_j(c)\} \qquad Gal(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$$



$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ k \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & k \end{tikzcd} \qquad W(k)[[T_1, \ldots, T_m]]/(\text{ideal})$$



$$\mathbb{Z}_p - \{0\} = \{p^n u \mid n \geq 0, u \text{ is a unit}\}$$

$$\mathbb{Q}_p - \{0\} = \{p^n u \mid u \text{ is a unit in } \mathbb{Z}_p\}$$

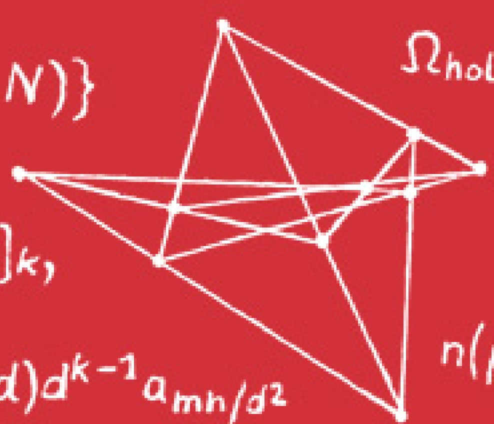
$$ef = n = [K : \mathbb{Q}_p]. \qquad w(x+y) \geq \min(w(x), w(y)) \qquad \frac{\sigma(\pi')}{\pi'} = \frac{\sigma(\pi)}{\pi}\frac{\sigma(u)}{u}$$

$$\text{(b) } \sigma \in G_i \longleftrightarrow w(\sigma(\pi) - \pi) \geq i+1 \longleftrightarrow \sigma(\pi)/\pi \in U_i \qquad \frac{\sigma\tau(\pi)}{\pi} = \frac{\sigma(\pi)}{\pi}\frac{\tau(\pi)}{\pi}\frac{\sigma(u)}{u}$$

$$\wp(z;\Lambda) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) \qquad (\mathbb{Z}/N)^\times \to \mathbb{C}^\times \qquad \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

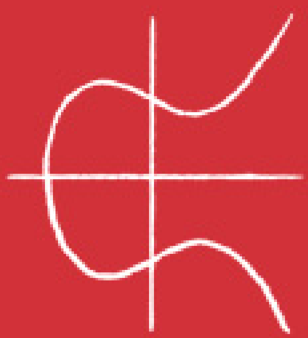
$$\Gamma_0(N) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}\right\} \qquad \text{For } \sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

$$\Gamma_1(N) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \mid d \equiv 1 \pmod{N}\right\}$$



$$\Omega_{hol}(X_0(N)) \to S_2(N)$$

$$f(z)dz \mapsto f(z)$$

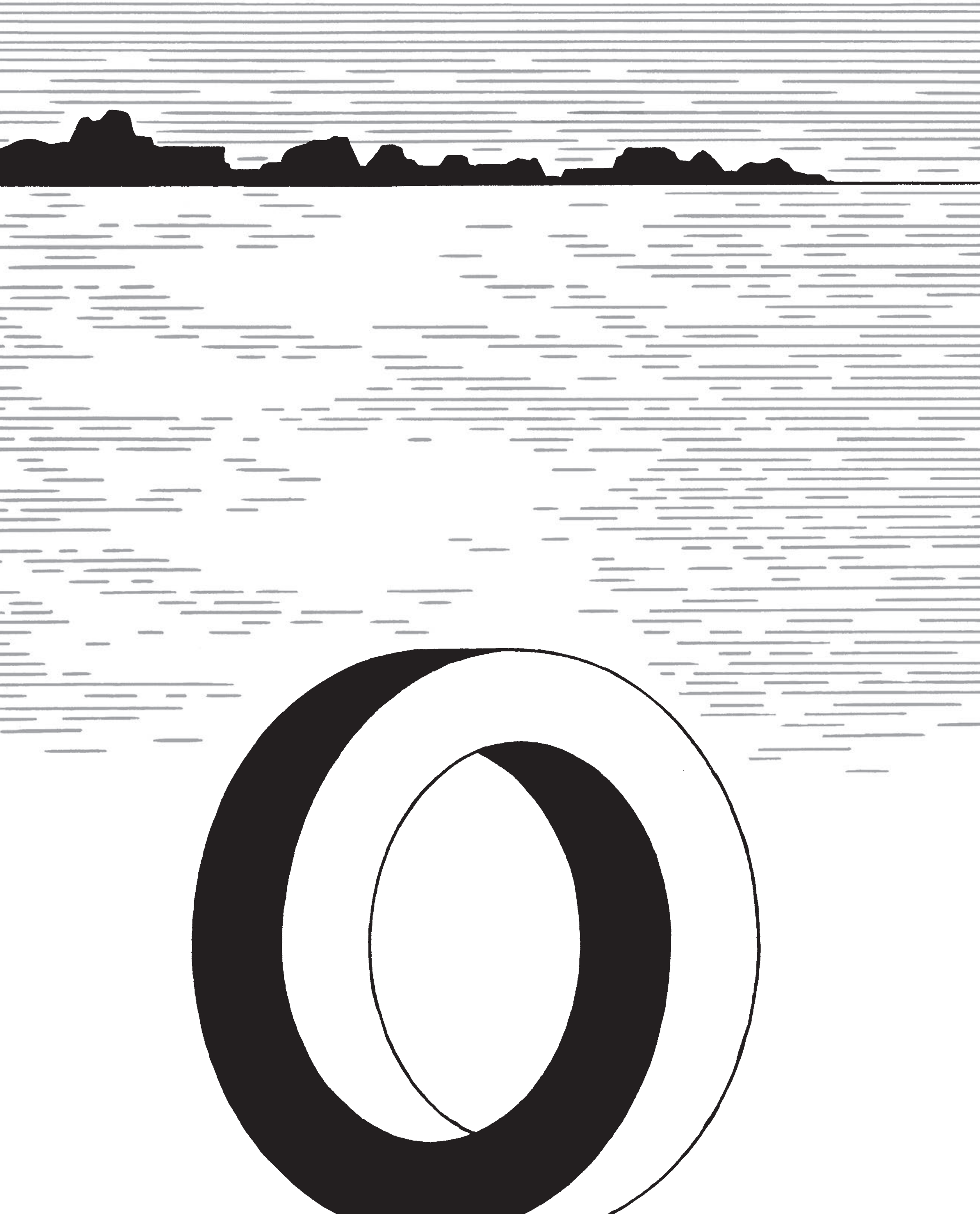


$$T_m f = m^{(k/2)-1}\sum_j f|[\alpha_j]_k,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n q^n, \text{ where } b_n = \sum_{d|(m,n)} \epsilon(d)d^{k-1}a_{mn/d^2}$$

$$n(p.\bar{p}) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\dim(V/V_i)}{|\mathcal{G}_0/\mathcal{G}_i|}$$

$$0 \to H^1_{\mathcal{L}}(G_{\mathbb{Q}}, M) \to H^1(G_{\mathbb{Q}}{}_S, M) \to \oplus_{p \in S} H^1(G_{\mathbb{Q}_p}, M)/L_p. \qquad \rho(I_q) = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 \\ 0 & \chi_2 \end{pmatrix}$$



Éditions Tanibis

7 €

9782848410517